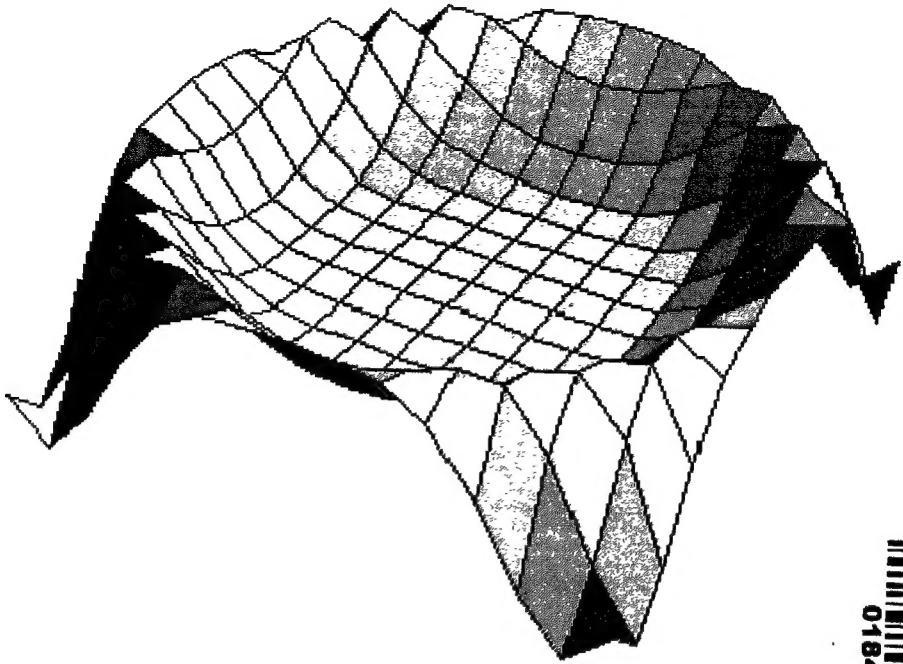


# ماتيماتكا

الرياضيات باستخدام الكمبيوتر

دكتور

رأفت رياض رزق الله



0184205  
Bibliotheca Alexandrina  
المكتبة الاسكندرانية  
الكتاب رقم 0184205



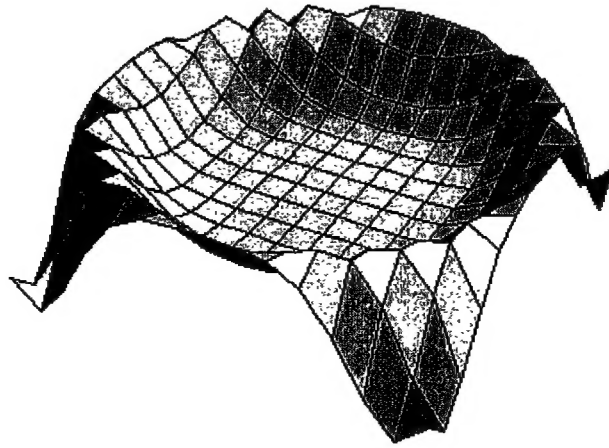
المكتبة الأكاديمية



# ماثياتيكا الرياضيات باستخدام الكمبيوتر



# ماتيماتكا الرياضيات باستخدام الكمبيوتر



دكتور / رأفت رياض رزق الله

أستاذ مساعد بقسم الرياضيات

كلية التربية - جامعة عين شمس



الناشر

المكتبة الأكاديمية

٢٠٠٠

## حقوق النشر

---

الطبعة الأولى : حقوق الطبع والنشر © ٢٠٠٠ جميع الحقوق محفوظة للناشر :

### المكتبة الأكاديمية

١٢١ شارع التحرير - الدقى - القاهرة

تليفون : ٣٤٨٥٢٨٢ / ٣٤٩١٨٩٠

فاكس : ٣٤٩١٨٩٠ - ٢٠٢

لا يجوز استنساخ أى جزء من هذا الكتاب بأى طريقة كانت  
إلا بعد الحصول على تصريح كتابى من الناشر .

برنامج ماثيماتكا *Mathematica* من تصميم  
*Stephen Wolfram* ويعتبر البرنامج علامة  
مسجلة من إنتاج شركة *Wolfram Research*



## مُتَكَمِّتٌ

برنامج ماثيماتيكاس هو نظام عام لعمل الحسابات العلمية ويستخدمه الآن العديد من الباحثين في مجال الرياضيات والهندسة في معظم أنحاء العالم وتطبيقات برنامج ماثيماتيكاس تدخل في العديد من العلوم كما يستخدم كلغة برمجة ولقد ظهر برنامج ماثيماتيكاس في عام 1988 وقام بتصميمه Stephen Wolfram الذي قام بتأسيس شركة Wolfram Research حيث تم تطوير برنامج ماثيماتيكاس وظهر له إصدارات على العديد من نظم الكمبيوتر مثل نظام التشغيل DOS ونظام النوافذ Windows وماكينتوش Mackintosh وكيفية التعامل مع الأوامر المختلفة مع التوضيح بالأمثلة المتعددة في فروع الرياضيات المختلفة وقد تم تقسيم الكتاب إلى سبعة أبواب كالآتي :

- الباب الأول : ما هو ماثيماتيكاس؟
- الباب الثاني : ماثيماتيكاس والحسابات العددية
- الباب الثالث : ماثيماتيكاس والجبر
- الباب الرابع : ماثيماتيكاس والتفاضل والتكامل
- الباب الخامس : ماثيماتيكاس ورسم الدوال
- الباب السادس : ماثيماتيكاس والتحليل العددي
- الباب السابع : البرمجة في ماثيماتيكاس



# المحتويات

الصفحة

13

## ما هو ماثيماتيكا؟

## الباب الأول

- 17 ١ - تشغيل ماثيماتيكا من خلال برنامج النوافذ Windows .....
- 22 ٢ - القلب والواجهة في ماثيماتيكا .....
- Kernel and Front End in Mathematica
- 30 ٣ - الحصول على معلومات من ماثيماتيكا .....
- Getting Information from Mathematica
- 38 ٤ - التعبيرات في ماثيماتيكا .....
- Mathematica and Expressions

41

## ماثيماتيكا والدوال العددية

## الباب الثاني

- 43 ١ - الحسابات العددية Numerical Calculation .....
- 47 ٢ - الأنظمة العددية Number Systems .....
- 51 ٣ - المتغيرات Variables .....
- 57 ٤ - بعض الدوال الرياضية ... Some Mathematical Functions
- 67 ٥ - الأعداد المركبة Complex Numbers .....

الصفحة

71	<b>ماثيماتيكاً والجبر</b>	<b>الباب الثالث</b>
73	١ - كثيرات الحدود والدوال الكسرية .....	
	<b>Polynomials and Rational Functions</b>	
79	٢ - المتسلسلات Series .....	
84	٣ - حل المعادلات Solving Equations .....	
92	٤ - الجبر الخطي Linear Algebra .....	
92	أولاً : القوائم Lists .....	
103	ثانياً : المصفوفات Matrices .....	
112	ثالثاً : حل الأنظمة الخطية Solving Linear Systems .....	
116	رابعاً : القيم المميزة والمتجهات المميزة .....	
	<b>Eigenvalues and Eigenvectors</b>	

119	<b>ماثيماتيكاً والتفاضل والتكامل</b>	<b>الباب الرابع</b>
121	١ - تعريف الدوال Defining Functions .....	
129	٢ - النهايات Limits .....	
134	٣ - التفاضل Differentiation .....	
141	٤ - التكامل Integration .....	
144	٥ - المعادلات التفاضلية Differential Equations .....	

الصفحة

149	<b>ماتيماتيكا ورسم الدوال</b>	<b>الباب الخامس</b>
152	..... Two-Dimensional Plotting	١ - رسم الدوال فى المستوى
176	..... Three-Dimensional Plotting	٢ - رسم الدوال فى الفراغ
193	..... Parametric Plots	٣ - رسم الدوال البارامترية
197	<b>ماتيماتيكا والتحليل العددي</b>	<b>الباب السادس</b>
200	..... Numerical Solution of Polynomial Equation	١ - الحل العددي لمعادلات كثيرات الحدود
202	..... Numerical Root Finding	٢ - إيجاد جذر تقريبي
208	..... Numerical Minimization	٣ - إيجاد القيم الصغرى
213	..... Numerical Sum and Product	٤ - الحساب العددي للمجموع وحواصل الضرب
216	..... Numerical Integration	٥ - التكامل العددي
221	..... Least - Squares	٦ - التقريب بالمربعات الصغرى

الصفحة

229

البرمجة في ماتيماتكا

الباب السابع

231

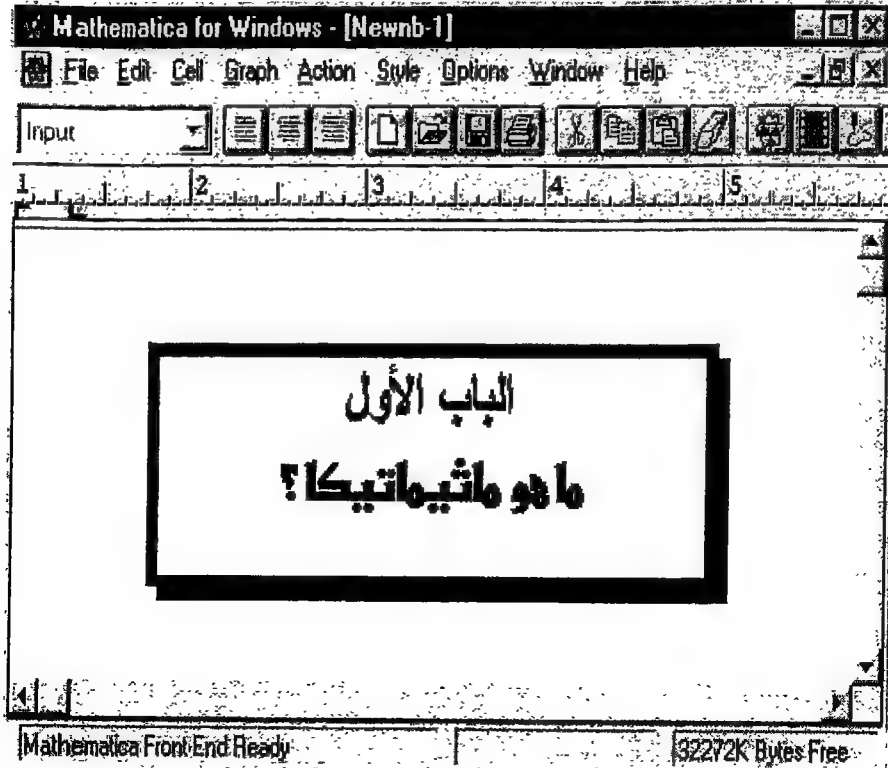
..... ١ - منظومة الإجراءات Procedure

234

..... ٢ - الحلقات التكرارية Loops

240

..... ٣ - أوامر الانتقال المشروط Conditionals



في هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا  
والخاصة بالموضوعات الآتية :

- ١ . تشغيل ماثيماتيكا من خلال برنامج النوافذ Windows
- ٢ . القلب والواجهة في ماثيماتيكا
- ٣ . الحصول على معلومات من ماثيماتيكا
- ٤ . التعبيرات في ماثيماتيكا



## الباب الأول

### ما هو ماثيماتيكاً ؟ What is Mathematica ?


برنامج ماثيماتيكاً هو نظام عام **General System** لعمل الحسابات والعمليات الرياضية المختلفة وهو برنامج مقيّد ومتعدد الأغراض ويخدم قطاعاً كبيراً من التخصصات العلمية المختلفة . وبرنامج ماثيماتيكاً يقوم بأجراء العمليات الحسابية العددية **Numerical Calculations** المتعارف عليها مثل الجمع والطرح والضرب والقسمة وحساب الأسس واللوغاريتمات والدوال المثلثية والزائدية سواء للأعداد الحقيقية **Real Numbers** أو الأعداد المركبة **Complex Numbers** وكذلك يقوم بأجراء العمليات الرياضية الرمزية **Symbolic** المتعارف عليها في فروع كثيرة من الرياضيات مثل الجبر والتفاضل والتكامل والجبر الخطي والمعادلات التفاضلية والدوال الخاصة والتحليل العددي والاحتمالات والإحصاء والبرمجة الخطية ، كما أن ماثيماتيكاً يقوم برسم الدوال سواء المباشرة أو البارامترية في بعدين أو ثلاثة أبعاد بالإضافة إلى إمكانات متقدمة في الرسم البياني وإنتاج وثائق رياضية تتضمن النصوص والمعادلات والرموز الرياضية والرسومات معا وكذلك يمكن استخدام ماثيماتيكاً كلغة برمجة لكتابة برامج تحل مشكلات كبيرة يعجز عن حلها أمر واحد وهذه البرامج لا تتعامل فقط مع الأعداد ولكن تتعامل أيضاً مع التعبيرات الرمزية ومع الأشكال المرسومة .

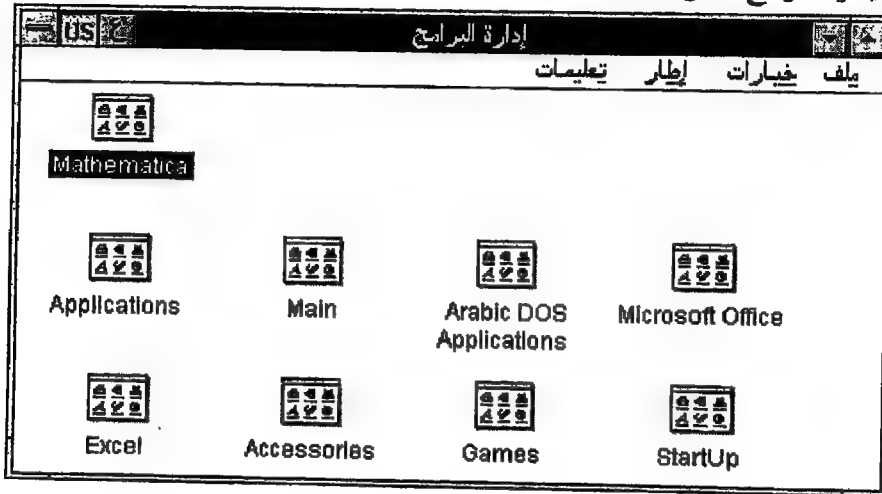
ولغة ماتيماتكا تعتبر لغة عالية المستوى جدا Very High Level Language ويطلق عليها أيضا لغة الجيل الرابع Fourth Generation Language لأنها تفعل في خطوة واحدة ما تفعله اللغات عالية المستوى ( مثل بيسك BASIC وفورتران FORTRAN وسي C وباسكال PASCAL وغيرها ) في عدة خطوات . ويوجد داخل برنامج ماتيماتكا built - in أكثر من 1000 دالة تخدم فروع الرياضيات المختلفة .

وبرنامج ماتيماتكا قام بتصميمه Stephen Wolfram وقامت شركة Wolfram Research بتقديم الإصدار الأول mathematica 2.0 في عام ١٩٨٨ ثم ظهر الإصدار الثاني mathematica 2.1 والإصدار الثالث mathematica 2.2

وقبل أن نتعرف على استخدامات ماتيماتكا سوف نعرض أولا كيفية تشغيل برنامج ماتيماتكا من خلال برنامج النوافذ Windows .

## ١. تشغيل ماثيماتكا من خلال برنامج النوافذ Windows

قدمت شركة مايكروسوفت برنامج النوافذ Microsoft Windows في العديد من الإصدارات ويمكن من خلاله تشغيل عدة برامج في وقت واحد وتبادل المعلومات بينها وهذا الأسلوب يعرف بأسلوب تعدد المهام multitasking ويقوم برنامج النوافذ بتقسيم الشاشة الى مناطق تعرف بالنوافذ أو الإطارات وكل نافذة تطل على برنامج أو مجموعة من البرامج ولكل نافذة عنوان يكتب على قمة النافذة ويتم تشغيل البرامج من داخل النوافذ بأسلوب حدد الهدف الذي تختاره ثم أطلق point and shoot أي وجه المؤشر نحو البرنامج المطلوب تنفيذه ثم اضغط زر الفأرة الأيسر أو اضغط مفتاح الإدخال Enter. وبرنامج النوافذ مثل البرامج التطبيقية الأخرى يمكن تشغيله من محث نظام التشغيل فإذا تم إنزاله على الاسطوانة الصلبة Hard Disk فإنه يمكن تشغيله مباشرة عن طريق كتابة win ثم تضغط على مفتاح الإدخال Enter وعند بدء تشغيل برنامج النوافذ  في الإصدار 3.1 سوف تظهر نافذة إدارة البرامج Program Manager مشابهة للشكل (١) الآتي



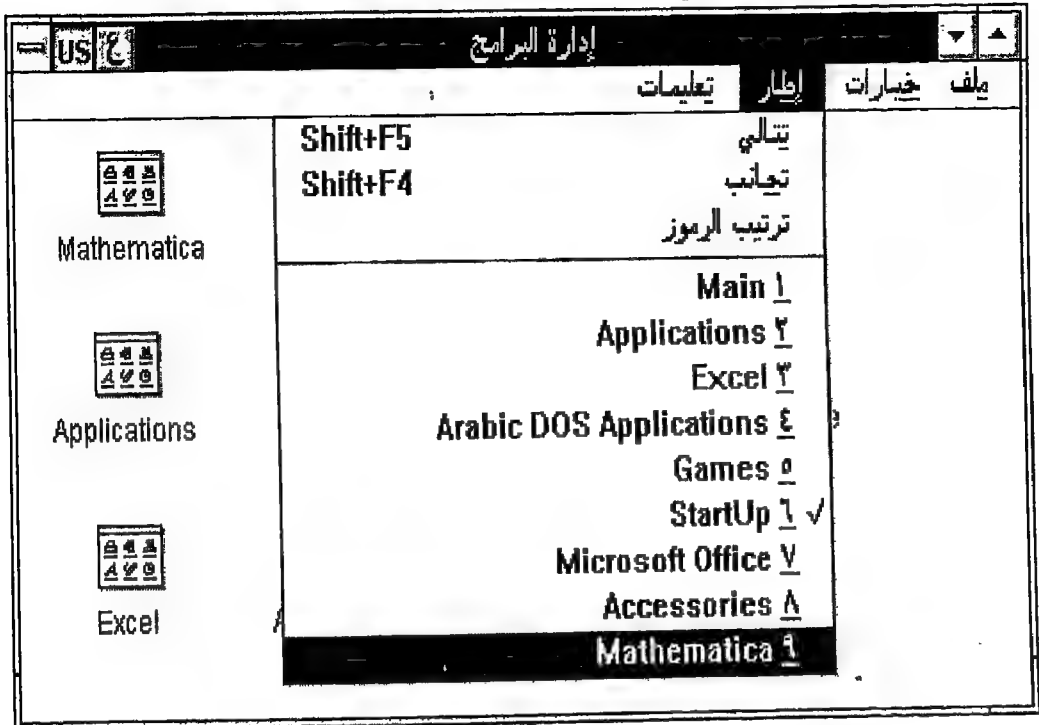
شكل (١)

## ماثميكا - الرياضيات باستخدام الكمبيوتر

وهناك عدة طرق لبدء تشغيل برنامج ماثميكا

- يمكن بدا تشغيله من مدير البرامج Program Manager كما نفعل مع معظم تطبيقات برنامج النوافذ Windows .
- كما يمكن تشغيله من مدير الملفات File Manager الموجود بالنافذة الرئيسية Main وذلك بأن نقر فوق أسم الملف ma.exe .

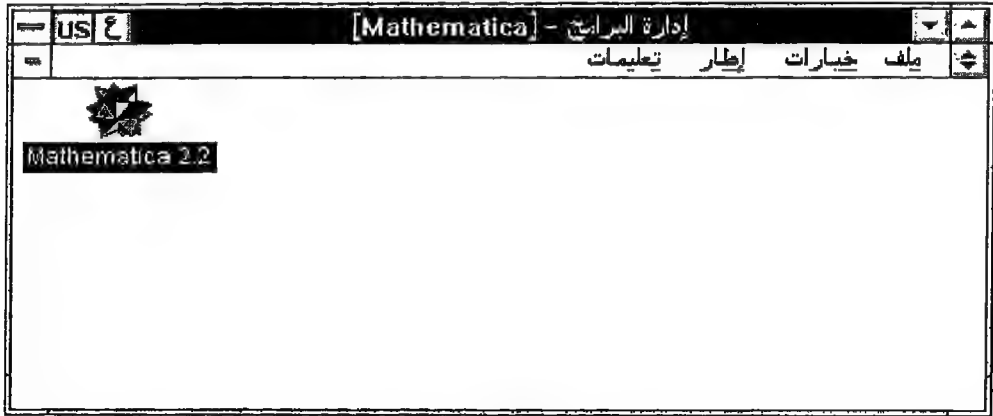
وفي الإصدار الأول mathematica 2.0 كان يتم تشغيل برنامج ماثميكا من بيئة نظام التشغيل Dos مباشرة ، وبفرض أن برنامج ماثميكا mathematica 2.2 قد تم إنزاله على الاسطوانة الصلبة بجهاز الكمبيوتر وذلك من خلال برنامج النوافذ Windows وانه موجود في إطار من إطارات برنامج النوافذ تحت أسم Mathematica وبجعل هذا الإطار هو الإطار النشط وذلك عن طريق اختيار البرنامج Mathematica من قائمة إطار Window في إدارة البرامج كما هو موضح في الشكل ( ٢ )




شكل ( ٢ )

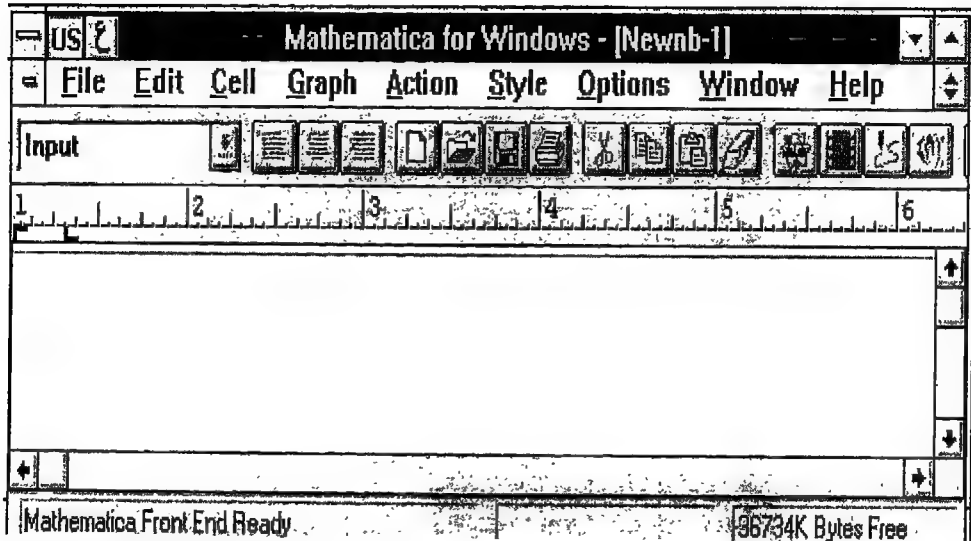
## ماثميكا - الرياضيات باستخدام الكمبيوتر

وبعد الضغط على زر الفأرة يتم الدخول الى النافذة الخاصة ببرنامج ماثميكا وسوف تظهر شاشة مثل الموضحة في شكل ( ٣ )

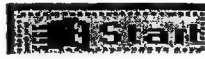


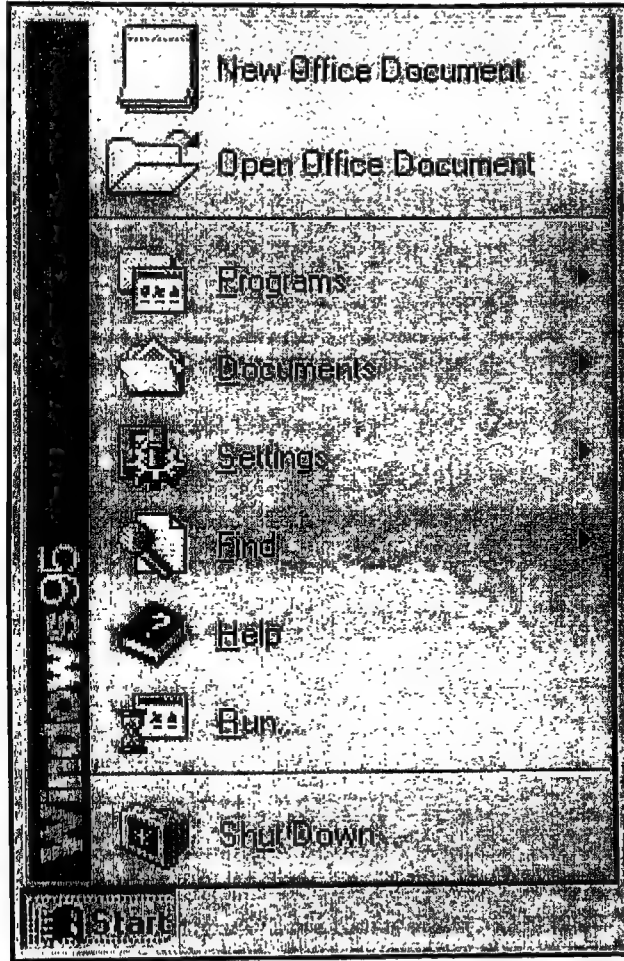
شكل ( ٣ )

حيث تظهر أيقونة الرمز الخاص ببرنامج ماثميكا  وعن طريق النقر مرتين بسرعة على هذا الرمز بواسطة الفأرة mouse بعد لحظات تظهر الشاشة المبينة في شكل ( ٤ )



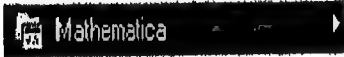
شكل ( ٤ )

وإذا كان برنامج النوافذ المستخدم Windows 95 فانه عند الضغط على المربع  الموجود في اسفل الشاشة من جهة اليسار فسوف تظهر قائمة كالموضحة في الشكل ( ٥ ) .



شكل ( ٥ )

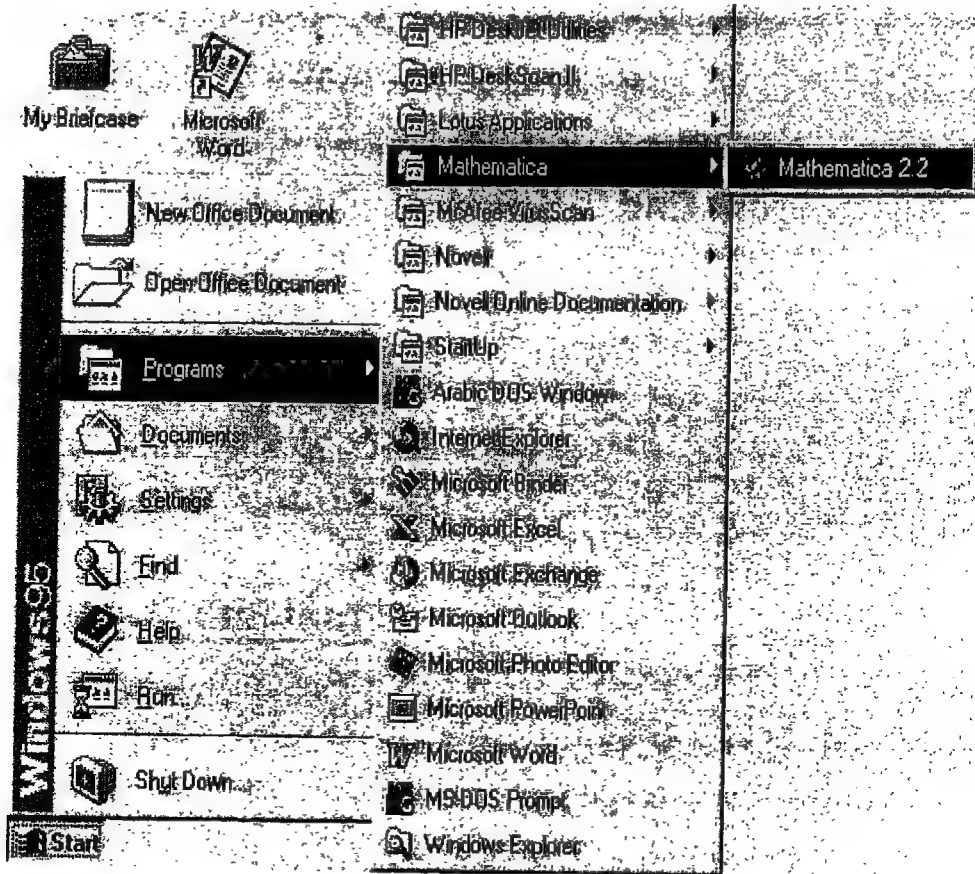
وتتحريك مؤشر الفارة الى الاختيار Programs ثم الضغط على زر الفارة تظهر قائمة أخرى



مثل الموضحة بالشكل (٦) ثم نضغط بزر الفارة على البرنامج

فتظهر الأيقونة الخاصة ببرنامج ماثميكا  وبالضغط عليها

يبدءا تحميل برنامج ماثماتكا وتظهر شاشة كالمينة فى شكل ( ٤ ) ويتم ذلك على اعتبار أن برنامج ماثماتكا 2.2 قد تم إنزاله على الاسطوانة الصلبة بجهاز الكمبيوتر .



شكل ( ٦ )

وسوف نتعرف الآن على تركيب ماثماتكا كبرنامج ، حيث تتيح معرفة هذا التركيب فهما اكثر لما يحدث أثناء استخدامنا لبرنامج ماثماتكا على الكمبيوتر .

## ٢. القلب والواجهة فى ماتيماتكا Kernel and Front End in Mathematica

يتكون برنامج ماتيماتكا من جزئين أساسيين هما

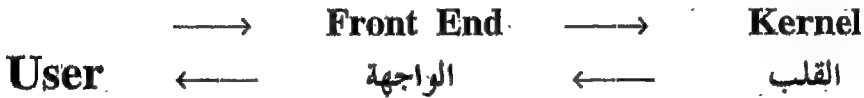
- القلب Kernel
- والواجهة Front End

### أما القلب Kernel

فهو الجزء الذي يقوم بتنفيذ العمليات الرياضية المطلوبة ، ويتم تحميل القلب عن طريق كتابة أي عملية حسابية بسيطة فى بداية التشغيل مثل  $1+1$  ثم نضغط على زر التنفيذ وهو مفتاح Insert الموجود على يمين لوحة المفاتيح ، ويمكن تحميل القلب مع بداية تشغيل ماتيماتكا عن طريق اختيار Option فى قائمة الاختيارات

### وأما الواجهة Front End

فهي حلقة الوصل بين المستخدم User والقلب Kernel وعندما يعطى المستخدم أمر ما لماتيماتكا لتنفيذه فانه فى الحقيقة يعطيه للواجهة التي تقوم بترجمته الى شفرات خاصة يفهمها القلب ، وعندما ينفذ القلب هذا الأمر فانه يخرج النتائج على هيئة شفرات تقوم الواجهة بترجمتها الى أرقام أو حروف أو رسومات أو ألوان حسب نتائج الأوامر المعطاة ويتم عرضها على الشاشة بطريقة يمكن فهمها والاستفادة منها وشكل ( ٧ ) يوضح العلاقة بين المستخدم والواجهة والقلب .



شكل ( ٧ )

وبرنامج ماثيماتكا يوجد له إصدارات على العديد من نظم الكمبيوتر مثل نظام التشغيل دوس DOS ونظام وندوز Windows وماكينتوش Makintosh ونظام يونيكس Unix ، وفي كل هذه النظم يوجد نفس القلب أما الواجهة فتختلف من نظام الى آخر بمعنى أن ماثيماتكا على كل نظام من هذه النظم قادر على أداء نفس القدر من العمليات الرياضية وإخراج نفس النتائج ، والشكل ( ٤ ) يمثل الواجهة فى نظام وندوز .

وطريقة إدخال الأوامر فى ماثيماتكا يكون بظهور المحث Prompt على الصورة

**In[n] :=**

حيث يقوم المستخدم بكتابة المدخلات أو الأمر المطلوب تنفيذه وبعد الضغط على زر التنفيذ Insert الموجود على يمين لوحة المفاتيح يقوم ماثيماتكا بطباعة الناتج Output بجانب المحث


**Out[n]=**

حيث n يمثل رقم المدخل لان ماثيماتكا يقوم بترقيم كل مدخلاته فى ترتيب تصاعدى . بالنظر الى واجهة ماثيماتكا فى شكل ( ٤ ) نرى أن الشاشة تنقسم الى ثلاثة أجزاء أساسية الجزء العلوى به أربعة صفوف

الصف الأول من أعلى عبارة عن الشريط الموضح



ويحتوى على الآتي :



- فى الركن الأيسر يوجد مربع صغير  يسمى قائمة التحكم Control Panel وهو موجود فى جميع تطبيقات النوافذ وبتحريك مؤشر الفأرة نحو هذا المربع ثم الضغط على زر الفأرة تفتح قائمة التحكم الآتية

Restore	
Move	
...	
Maximize	
Close	Alt+F4
System...	
Switch To...	Ctrl+Esc

ومن خلال هذه القائمة يمكن نقل Move أو تكبير Maximize أو تصغير Minimize نافذة البرنامج أو غلق النافذة Close والخروج من البرنامج أو التبديل الى برنامج آخر Switch To

- المربع  بالضغط عليه بالفارة يتم تحويل الكتابة الى اللغة الإنجليزية

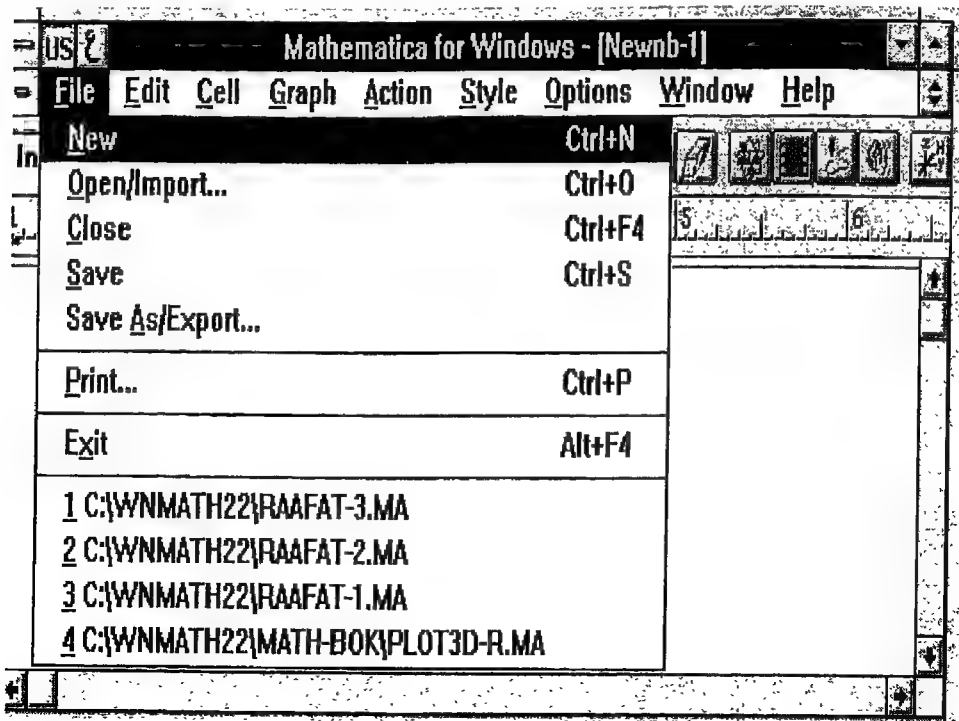
- المربع  بالضغط عليه بالفارة يتم تحويل الكتابة الى اللغة العربية

- في منتصف الشريط يوجد عنوان البرنامج Mathematica for Windows وأسم الملف الذي يتم التعامل معه وبرنامج ماتيماتيكا يقوم بإعطاء الاسم Newnb-1 للملف عند بداية التشغيل ويمكن للمستخدم حفظ الملف بعد ذلك بالاسم الذي يريده
- في الركن الأيمن يوجد مثلثان صغيران أحدهما يشير الى أعلى  ويستخدم لتكبير واجهة البرنامج والأخر الى اسفل  ويستخدم لتصغير واجهة البرنامج ويتم ذلك عن طريق تحريك مؤشر الفارة نحو رمز المثلث المطلوب ثم الضغط على زر الفارة .

الصف الثاني من أعلى هو صف القائمة الرئيسية Bar menu وبه مجموعة الاختيارات الآتية

File Edit Cell Graph Action Styl Options Window Help

وبتحريك المؤشر نحو الاختيار المطلوب ثم الضغط على زر الفارة الأيسر فانه يخرج من هذا الاختيار قائمة مسحوبة تسمى بالقائمة العمودية وبها مجموعة من الاختيارات التي تسهل من العمل داخل ماتيماتيكا ، فمثلا عند الضغط بالفارة على الاختيار File الموجود في صف القائمة الرئيسية ( أو بالضغط على مفتاح Alt مع الحرف F ) تظهر الشاشة الموضحة بالشكل ( ٨ ) وبها نجد مجموعة من الاختيارات الفرعية في القائمة العمودية .



شكل ( ٨ )

وبرنامج ماثميكا يخصص بعض المفاتيح لأداء مهمة معينة والرموز الخاصة بهذه المفاتيح تكتب أمام الخيار في القائمة ويطلق عليها مفاتيح الاختصار Sort Cut Keys فمثلا القائمة الخاصة بالاختيار File تحتوي على الآتي :

الخيار	مفاتيح الاختصار	الوظيفة التي يقوم بها الخيار
<u>N</u> ew	Ctrl + N	عمل ملف جديد داخل ماثميكا
<u>O</u> pen / Import	Ctrl + O	فتح ملف سبق تخزينه بواسطة برنامج ماثميكا
<u>C</u> lose	Ctrl + F4	إغلاق الملف المفتوح
<u>S</u> ave	Ctrl + S	حفظ الملف تحت اسمه السابق
<u>P</u> rint	Ctrl + P	طباعة الملف على جهاز الطباعة

وفى نهاية القائمة العمودية الخاصة بالاختيار **File** تظهر أسماء آخر أربعة ملفات سبق التعامل معها حيث يتم فتح أي منها بمجرد الضغط على أسم الملف المطلوب. وعند التعامل مع بعض الخيارات بالقوائم العمودية تظهر صناديق حوارية يطلق عليها **dialog boxes** وتحتوى هذه الصناديق على رسائل أو خيارات من ضمنها

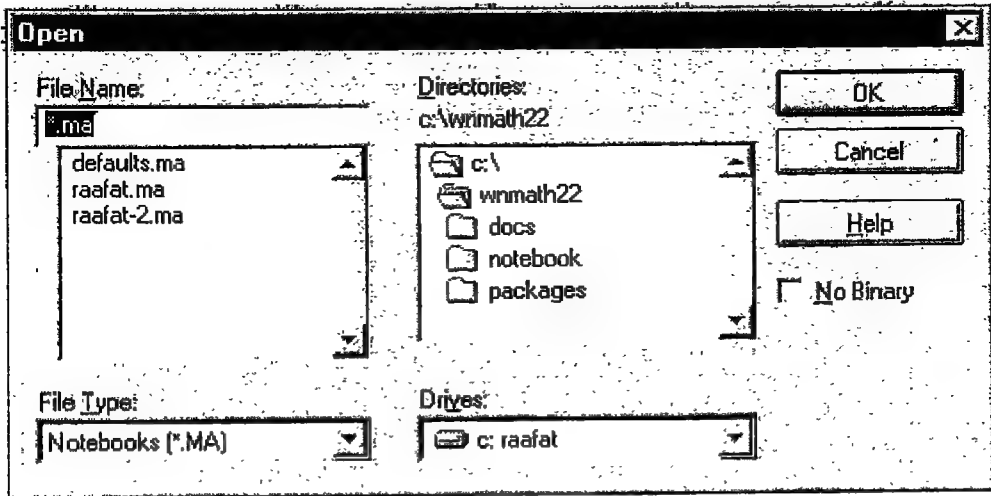


خيار موافق



وخيار إلغاء الأمر

فمثلاً عند الضغط بمؤشر الفأرة على الخيار **Open** من القائمة العمودية **File** يظهر صندوق حوارى مثل الموجود بالشكل ( ٩ )



شكل ( ٩ )

وبعد تحديد أسم الملف المطلوب فتحه من الخيار **File Name** ومكان وجوده على القرص من الخيار **Drives** ثم الضغط بمؤشر الفأرة على موافق **OK** يتم فتح الملف المطلوب. وعن طريق الاختيار **Help** من صف القائمة الرئيسية يمكن التعرف على شرح وافى لخصائص برنامج ماثماتيكاً.

والصف الثالث من أعلى عبارة عن شريط رمادى اللون وهو قائمة الأدوات Tool bar الموضحة



وتحتوى قائمة الأدوات على الكثير من الرموز مثل

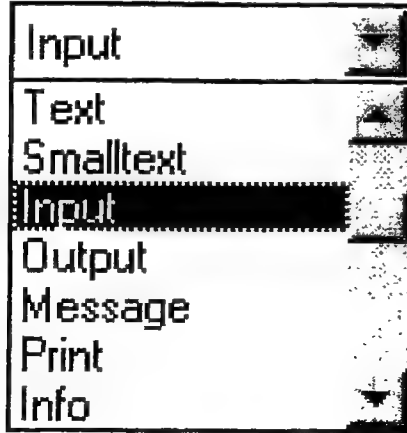
الرمز	الوظيفة التى يقوم بها
	New فتح وثيقة جديدة
	Open فتح ملف قديم
	Save حفظ الملف
	Print طباعة الملف
	Cut القص
	Copy النسخ
	Paste اللصق
	Insert تنفيذ الأمر

وهذه الرموز تساعد المستخدم فى التعامل مع مايمايكا وتنفيذ المهام بسرعة .

Input

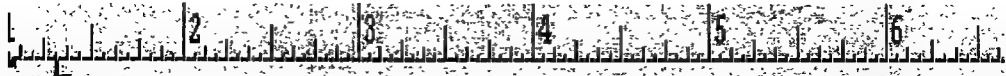
وفي بداية قائمة الأدوات من اليسار يوجد الاختيار

وبالضغط على السهم  تفتح القائمة العمودية الآتية



وعن طريق هذه القائمة يمكن التحكم فى شكل ومواصفات البيانات المدخلة أو البيانات الناتجة .

والصف الرابع يوجد فى نهاية الجزء العلوى وهو شريط رمادى اللون وبه مسطرة ،



والجزء السفلى من الشاشة عبارة عن شريط رمادى اللون يسمى شريط الحالة Status bar ويحتوى على بعض البيانات التى نخبرنا عن حالة ماتيماتيكاً كل لحظة من حيث حجم الذاكرة المتاح وبيانات عن العمليات التى يتم إدخالها وتنفيذها



وأعلى هذا الشريط وفى الجانب الأيمن من الشاشة توجد شرائط التصفح أو شرائط التمرير وعن طريق المؤشرات الموجودة بها يمكن رؤية المزيد من المعلومات على الواجهة والتى قد تحجب فى أثناء العمل .



أما المساحة البيضاء المحصورة بين الجزء العلوى والجزء السفلى فى الواجهة فإنها تمثل منطقة العمل ويتم فيها كتابة الأوامر والعمليات المطلوب تنفيذها بنفس الطريقة التى نكتب بها فى أى

برنامج معالج كلمات Word Processing فمثلا


- لمسح حرف على يسار المؤشر نضغط على مفتاح Backspace
- لمسح حرف على يمين المؤشر نضغط على مفتاح Del
- للانتقال الى سطر جديد نضغط على المفتاح Enter

ويمكن الاستفادة من مزايا العمل تحت نظام النوافذ Windows مثل ميزة


- النسخ Copy
- القص Cut
- اللصق Paste

فمثلا عندما نريد تنفيذ عملية تم كتابتها من قبل فإنه يمكن الذهاب إليها بالمؤشر وتظليلها بالفارة ثم الذهاب بالمؤشر الى الاختيار Edit فى صف القائمة الرئيسية والضغط على الأمر



Copy لعمل نسخة من الجزء المظلل ( أو بالضغط بمؤشر الفارة مباشرة على الرمز  أو بالضغط على المفتاح Ctrl والمفتاح V معا من لوحة المفاتيح ) وبعد ذلك نذهب بالمؤشر الى المكان المطلوب لصق النسخة فيه ثم نضغط على الأمر Paste من الاختيار Edit ( أو



بالضغط بمؤشر الفارة مباشرة على الرمز  أو بالضغط على المفتاح Ctrl والمفتاح X معا من لوحة المفاتيح ) وبعد الحصول على النسخة المطلوبة يتم تنفيذها أو عمل التعديلات المطلوبة بها قبل التنفيذ مما يوفر الوقت . ولإرسال أى أمر لتنفيذه بعد كتابته نضغط على



مفتاح التنفيذ Insert ( أو بالضغط بمؤشر الفارة مباشرة على الرمز  ) .

مفتاح التنفيذ Insert

بمفتاح الإدخال Enter

وخلال دراستنا عندما نذكر جملة أرسل الأمر فهذا يعنى كتابة الأمر بعد ظهور الخش الخاص  
بماتيماتكا وتنفيذه عن طريق الضغط على مفتاح التنفيذ Insert .

### ٣ . الحصول على معلومات من ماتيماتيكا Getting Information from Mathematica

فى كثير من الأحيان نحتاج الى التعرف على المعلومات الخاصة بالأوامر والدوال المختلفة فى ماتيماتيكا والتعرف على الصيغة العامة وكيفية كتابة كل من هذه الأوامر وماتيماتيكا يقدم لنا ذلك عن طريق رمز علامة الاستفهام ؟ فعندما ندخل الأمر

**? Name**

حيث Name يمثل أسم الأمر أو الدالة المطلوب الاستعلام عنها وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيذ تظهر الصيغة العامة وجميع المعلومات الخاصة بالأمر Name ويراعى أن يكون الحرف الأول فقط من أسم الأمر أو الدالة مكتوب بالحروف الكبيرة **Capital** وإذا كان أسم الأمر يحتوى على كلمتين أو أكثر فإن كل كلمة فى الأمر تبدأ بحرف كبير ، فمثلا لمعرفة الصيغة العامة للدالة Log يرسل الأمر

**? Log**

وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيذ يظهر الآتي

**Log[z]** gives the natural logarithm of z (logarithm to base E)

**Log[b, z]** gives the logarithm of z to base b.

أي أن الأمر **Log[z]** يقوم بحساب قيمة اللوغاريتم الطبيعي للعدد z للأساس e والأمر فى الصيغة **Log[b, z]** يقوم بحساب قيمة اللوغاريتم للعدد z للأساس b

**?Plot**

ولمعرفة الصيغة العامة لأمر الرسم **Plot** يرسل الأمر

وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيذ يظهر الآتي

**Plot[f, {x, xmin, xmax}]** generates a plot of f as a function of x from xmin to xmax.

**Plot[{f1, f2, ...}, {x, xmin, xmax}]** plots several functions fi.

أي أن الأمر **Plot[f, {x, xmin, xmax}]** يقوم برسم الدالة  $f(x)$  في النطاق من

$x = x_{min}$  إلى  $x = x_{max}$

والأمر في الصيغة **Plot[{f1, f2,...}, {x, xmin, xmax}]** يقوم برسم مجموعة

الدوال  $f_1, f_2, \dots$

في النطاق من  $x = x_{min}$  إلى  $x = x_{max}$

وللتعرف على معلومات إضافية عن أمر الرسم **Plot** مثل التعرف على الخيارات التي يمكن

أضافتها إلى الرسم يرسل الأمر

**?? Plot**

وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيذ يظهر الآتي

**Plot[f, {x, xmin, xmax}]** generates a plot of f as a function of x from xmin to xmax. **Plot[{f1, f2, ...}, {x, xmin, xmax}]** plots several functions fi.

**Attributes[Plot] = {HoldAll, Protected}**

**Options[Plot] =**

**{AspectRatio -> GoldenRatio^(-1), Axes -> Automatic, AxesLabel -> None, AxesOrigin->Automatic,AxesStyle->Automatic,Background->Automatic, ColorOutput -> Automatic,Compiled -> True, DefaultColor -> Automatic, Epilog-> {},Frame-> False,FrameLabel-> None,FrameStyle-> Automatic, FrameTicks -> Automatic, GridLines -> None, MaxBend -> 10., PlotDivision -> 20., PlotLabel -> None, PlotPoints -> 25, PlotRange -> Automatic,PlotRegion -> Automatic, PlotStyle -> Automatic, Prolog -> {}, RotateLabel -> True, Ticks -> Automatic, DefaultFont -> \$DefaultFont, Display Function-> \$DisplayFunction}**

ونلاحظ وجود قائمة كبيرة من الخيارات التي تستخدم مع أمر الرسم **Plot** سوف نتعرف عليها بالتفصيل في الباب الخامس ( ماثيماتكا ورسم الدوال ) ،

وللتعرف على جميع الأوامر والدوال التي تبدأ بحرف **A** يرسل الأمر

**?A\***

وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيذ يظهر الآتي

<b>Abort</b>	<b>Append</b>	<b>AbortProtect</b>	<b>AppendTo</b>
<b>Above</b>	<b>Apply</b>	<b>Abs</b>	<b>ArcCos</b>
<b>AbsoluteDashing</b>	<b>ArcCosh</b>	<b>AbsolutePointSize</b>	<b>ArcCot</b>
<b>AbsoluteThickness</b>	<b>ArcCoth</b>	<b>AbsoluteTime</b>	<b>ArcCsc</b>
<b>CcountingForm</b>	<b>ArcCsch</b>	<b>Accumulate</b>	<b>ArcSec</b>
<b>Accuracy</b>	<b>ArcSech</b>	<b>AccuracyGoal</b>	<b>ArcSin</b>
<b>AddTo</b>	<b>ArcSinh</b>	<b>AiryAi</b>	<b>ArcTan</b>
<b>AiryAiPrime</b>	<b>ArcTanh</b>	<b>AiryBi</b>	<b>Arg</b>
<b>AiryBiPrime</b>	<b>AlgebraicRules</b>	<b>Array</b>	<b>AspectRatio</b>
<b>Alias</b>	<b>AtomQ</b>	<b>All</b>	<b>Attributes</b>
<b>Alternatives</b>	<b>Automatic</b>	<b>AmbientLight</b>	<b>Auxiliary</b>
<b>Analytic</b>	<b>Axes</b>	<b>AnchoredSearch</b>	<b>AxesEdge</b>
<b>And</b>	<b>AxesLabel</b>	<b>Apart</b>	<b>AxesOrigin</b>
<b>ApertSquareFree</b>	<b>AxesStyle</b>		
<b>ArithmeticGeometricMean</b>			
<b>AlgebraicRulesData</b>			

حيث يظهر بيان بجميع الأوامر والدوال الموجودة في برنامج ماثيماتكا. والتي تبدأ بحرف **A** وقد استخدمنا الرمز \* ليحل مكان أي عدد من الحروف يكتب بعد الحرف **A** ويمكن الاستعلام عن أي من هذه الأوامر أو الدوال كما سبق وذكرنا ، ومن ذلك نرى أنه بواسطة الرمز ? يمكن التعرف على شرح والى لجميع الأوامر والدوال في ماثيماتكا. ويوجد رمز آخر هو علامة النسبة المئوية % من خلاله يتيح لـ ماثيماتكا إمكانية أجواء عمليات على ناتج أخرجه من قبل ،

مثال توضيحي

-- إذا أدخلنا إلى ماتيماتكا عملية مثل  $3+5$  فإن الناتج يكون 8

-- وإذا أردنا إجراء عملية على هذا الناتج مثل طرح 2 منه فإننا نشير إلى هذا الناتج بعلامة النسبة المئوية % وبالتالي بدلاً من كتابة 8-2 يكتب 2-% فيخرج لنا الناتج 6

-- وإذا أردنا إجراء عملية أخرى على نفس الناتج الأول 8 بقسمته على 4 فإننا نشير إلى الناتج 8 بعلامة نسبة مئوية % لان الناتج 8 يسبق هذه العملية بعمليتين كما يلي  $14\% \%$  فيخرج لنا الناتج 2 .

ولما كان ماتيماتكا يرقم لنا كل من مدخلاته ومخرجاته ترقيم تصاعدي فإن هناك طريقة اسهل خاصة إذا كان المطلوب إجراء عملية على ناتج أخرجه ماتيماتكا قبل العملية الحالية بعدد كبير من العمليات وفي هذه الحالة توضع علامة النسبة المئوية يليها رقم ذلك الناتج حسب الترقيم المعطى من ماتيماتكا

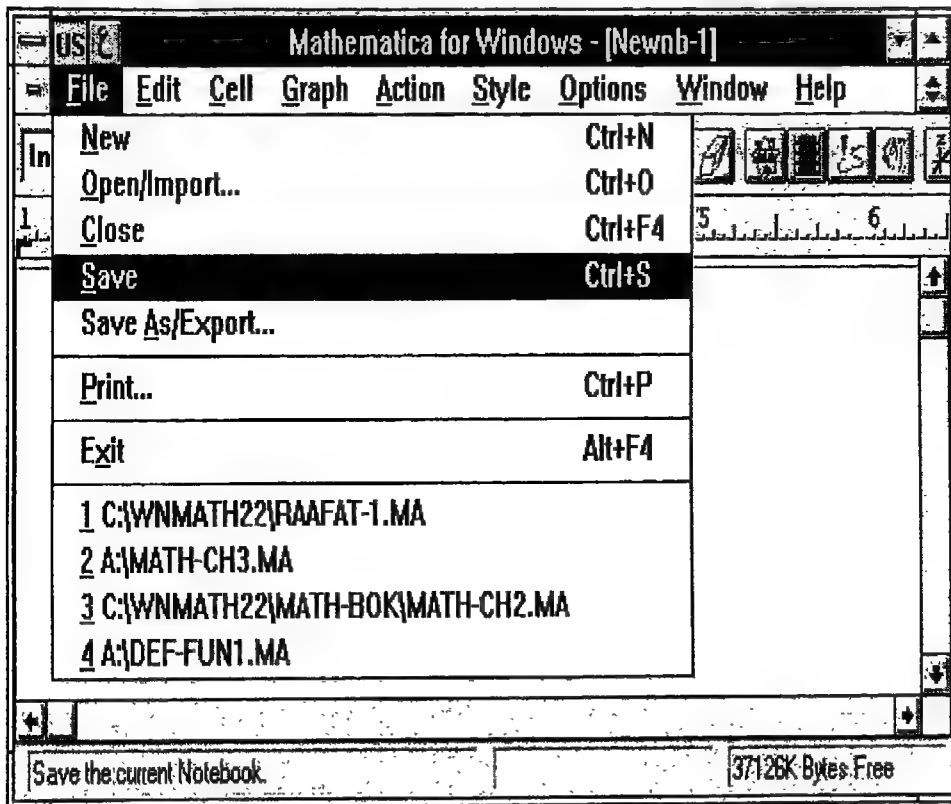
ولتوضيح ذلك

-- إذا كان 8 في المثال السابق هو ناتج العملية رقم 40 (Out[40]) وأردنا طرح 2 منها فإننا نكتب

2 - 40 %

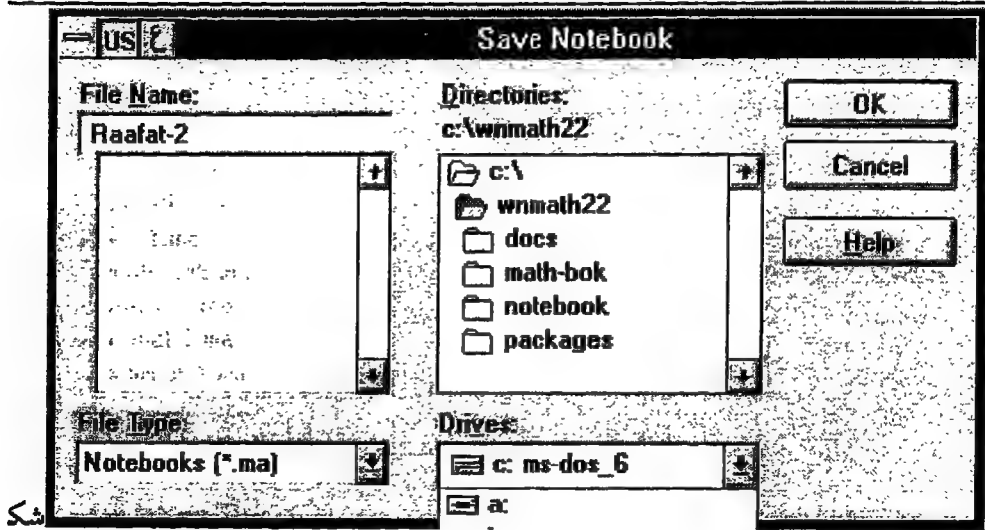
فيخرج لنا الناتج 6 .

ويقوم برنامج ماتيماتكا بتسجيل كل ما يكتب وينفذ من أوامر فى ملف يسمى دفتر notebook وفى نهاية العملية يقوم المستخدم user بحفظ هذا الدفتر فى ملف تحت أسم يختاره المستخدم ويتكون اصل الاسم root name من حرف الى ثمانية حروف ويقوم ماتيماتكا بوضع الاسم الممتد extension الخاص به وهو ma ويتم الحفظ عن طريق الضغط بمؤشر الفارة على **File** فى شريط القائمة الرئيسية فى أعلى الواجهة فتظهر قائمة عمودية مثل الموضحة فى شكل ( ١٠ ) .



شكل ( ١٠ )

وبالضغط بمؤشر الفارة على الأمر **Save** تظهر نافذة أخرى كما فى الشكل ( ١١ )



شكل

ل (١١)

وبعد كتابة أسم الملف نقوم باختيار المكان الذي سيحفظ فيه على القرص الصلب C أو أقراص مرنة A , B ويتم ذلك بالضغط بمؤشر الفأرة على الرمز

**Drives**

وفي الشكل (١١)

- تم تسمية الملف باسم Raafat-2.ma



- وتم تخزينه على القرص الصلب C داخل الفهرس المفتوح

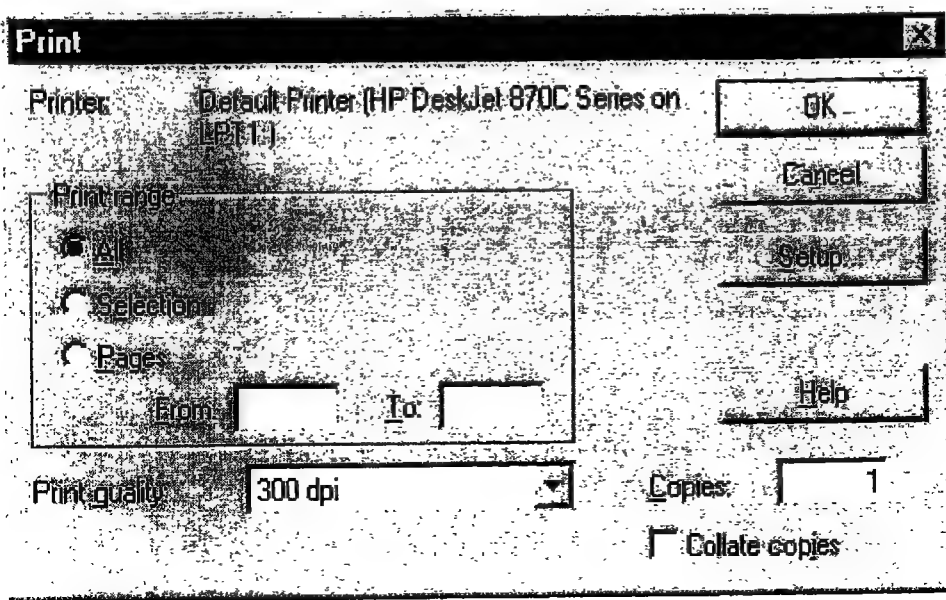


وبالضغط على موافق يتم التخزين

وأثناء التعامل مع الملف المفتوح Raafat-2.ma يمكن تكرار تخزينه ويتم ذلك بالضغط مباشرة على الاختيار **Save** وفي هذه الحالة يتم التخزين مباشرة دون ظهور النافذة الخاصة

بالأمر **Save** ويمكن عمل ذلك مباشرة بالضغط بمؤشر الفأرة على الرمز الموجود في قائمة الأدوات ويمكن حفظ الملف تحت أسم آخر وذلك بالضغط على الاختيار **Save As**. ولطباعة الملف على الورق نضغط بالفأرة على الخيار **Print** من القائمة العمودية

**File** (أو بالضغط مباشرة على الرمز ) من قائمة الأدوات) فيظهر صندوق حوارى كما فى الشكل ( ١٢ )



شكل ( ١٢ )

وبواسطة مؤشر الفأرة يتم الانتقال الى الخيارات الفرعية داخل الصندوق الحوارى

**Copies**

لتحديد عدد النسخ المطلوبة

**Print range**

ولتحديد الصفحات المطلوب طباعتها على الورق

**OK**

وتتم الطباعة على الورق بالضغط على موافق

وبنفس الطريقة يمكن التحول الى أى قائمة فى صف القائمة الرئيسية وتنفيذ كل ما فيها من مهام .

ومن المميزات الهامة في برنامج ماتيماتكا انه بالإضافة الى الدوال الكثيرة الموجودة في قلب ماتيماتكا والتي تشمل العديد من فروع الرياضيات فإنه يمكن للمستخدم تعريف الدوال الخاصة به وذلك لان ماتيماتكا يستخدم كلغة برمجة وكذلك توجد حزم **packages** لموضوعات متخصصة في الرياضيات وكل حزمة تحتوي على تعريفات رياضية لدوال متخصصة في فرع دقيق من الرياضيات فمثلا توجد حزم متخصصة في كل من الفروع الآتية :

Algebra	الجبر
Calculus	حساب التفاضل والتكامل
Geometry	الهندسة
Linear Algebra	الجبر الخطي
Number Theory	نظرية الأعداد
Numerical Analysis	والتحليل العددي
Vector Analysis	تحليل المتجهات
Statistics	الإحصاء
Linear Programming	البرمجة الخطية
Fourier Transforms	تحويلات فوريير
Laplace Transforms	تحويلات لابلاس

و يتم استدعاء الحزمة عن طريق إرسال الأمر **<< PackageName** حيث **PackageName** تمثل أسم الحزمة المطلوب استدعاؤها .

## ٤ . التعبيرات في ماثميكا Mathematica and Expressions

برنامج ماثميكا يتعامل مع أنواع عديدة ومختلفة من الأشياء مثل الصيغ الرياضية **mathematical formulas** والقوائم **lists** والرسوم **graphs** وعلى الرغم من أن هذه الأشياء غالبا ما تبدو مختلفة لكن ماثميكا يتعامل معها جميعا بشكل قياسي في صورة تعبيرات **expressions** فمثلا **f[x]** يمثل تعبير في ماثميكا لتعريف دالة **f(x)** هذه الدالة لها الاسم **f** وذات متغير واحد **x** كذلك **g[x,y]** تمثل دالة **g(x,y)** لها الاسم **g** وذات متغيرين **x, y** . أيضا العملية الحسابية **x + y** تمثل تعبير في ماثميكا حيث يقوم القلب في ماثميكا بتحويله الى الشكل القياسي **Plus[x,y]** والدالة **Plus** تمثل أسم دالة الجمع وعند طباعة الناتج مرة أخرى على الواجهة الأمامية يكتب بالصورة **x + y** وبالمثل المؤثرات الأخرى مثل الضرب والقسمة والرفع الى أس كل منها له شكل قياسي .

$X + y + z$	<b>Plus[x,y,z]</b>
$x y$	<b>Times[x,y]</b>
$x^n$	<b>Power[x,n]</b>
$\{x,y,z\}$	<b>List[x,y,z]</b>
$a \rightarrow b$	<b>Rule[a,b]</b>
$a=b$	<b>Set[a,b]</b>

بعض الأمثلة لتعبيرات في ماثميكا

وفي الحقيقة فإن كل شئ يتم كتابته في الواجهة الأمامية لبرنامج ماتيماتكا يعامل كتعبير له أسم يطلق عليه رأس التعبير **Head** وهذا الاسم قد يمثل

- عملية **Operation** مثل الجمع أو الطرح **Plus** ، الضرب أو القسمة **Times**

- بناء **Structure** مثل القائمة **List**

ويأخذ الاسم معامل **argument** أو أكثر **Name[arguments]** ويجب ملاحظة أن معاملات جميع الدوال في ماتيماتكا توضع داخل أقواس مربعة من النوع [ ] .

**Head** للاستعلام عن أسم التعبير يستخدم الأمر

**FullForm** للاستعلام عن الشكل القياسي أو البناء الكامل للتعبير يستخدم الأمر

وفي الجدول الآتي نضع بعض الأمثلة لاستخدام الأمر **Head** والأمر **FullForm**

In[1]:=Head[x+y+z] Out[1]:=Plus	عند تطبيق الدالة <b>Head</b> على العملية $x+y+z$ فان الناتج يكون <b>Plus</b>
In[2]:= FullForm[x+y+z] Out[2]:=Plus[x,y,z]	عند تطبيق الدالة <b>FullForm</b> على العملية $x+y+z$ فان الناتج يكون <b>Plus[x,y,z]</b>
In[3]:= Head[x*y] Out[3]:=Times	عند تطبيق الدالة <b>Head</b> على العملية $x*y$ فان الناتج يكون <b>Times</b>
In[4]:= Head[x*y+z] Out[4]:=Plus	عند تطبيق الدالة <b>Head</b> على العملية $x*y+z$ والتي تشمل ضرب $x*y$ ثم الجمع الى $z$ فان الناتج يكون <b>Plus</b> والذي يمثل عنوان العملية النهائية
In[5]:= FullForm[x*y+z] Out[5]:=Plus[Times[x, y], z]	عند تطبيق الدالة <b>FullForm</b> على العملية $x*y+z$ فان الناتج يكون <b>Plus[Times[x, y], z]</b>
In[6]:=FullForm[4+5x^2] Out[6]:=Plus[4,Times[5,Power[x,2]]	عند تطبيق الدالة <b>FullForm</b> على العملية $4+5x^2$ فان الناتج يكون <b>Plus[4,Times[5,Power[x,2]]]</b>

إذا كان التعبير يحتوي على أجزاء متعددة ومتداخلة فيمكن التعرف على البناء الشجري

Tree Structure باستخدام الأمر Tree Form

In[7]:=TreeForm[x^3+(1+x)^2]

Out[7]=

Plus[ | , | ]  
Power[x, 3] Power[ | , 2]  
Plus[1, x]

وعند تطبيق الدالة Head على عدد صحيح Integer أو عدد نسبي Rational أو عدد مركب Complex فإن الناتج يمثل نوع العدد .

In[8]:Head[25]

عند تطبيق الدالة Head على العدد 25 فإن

Out[8]:=Integer

الناتج يكون عبارة صحيح Integer والتي  
تفيد نوع العدد المستخدم

In[9]:Head[3/4]

عند تطبيق الدالة Head على العدد  $\frac{3}{4}$  فإن

Out[9]:= Rational

الناتج يكون عدد نسبي Rational

In[10]:Head[2.4]

عند تطبيق الدالة Head على العدد 2.4 فإن

Out[10]:=Real

الناتج يكون عدد حقيقي Real

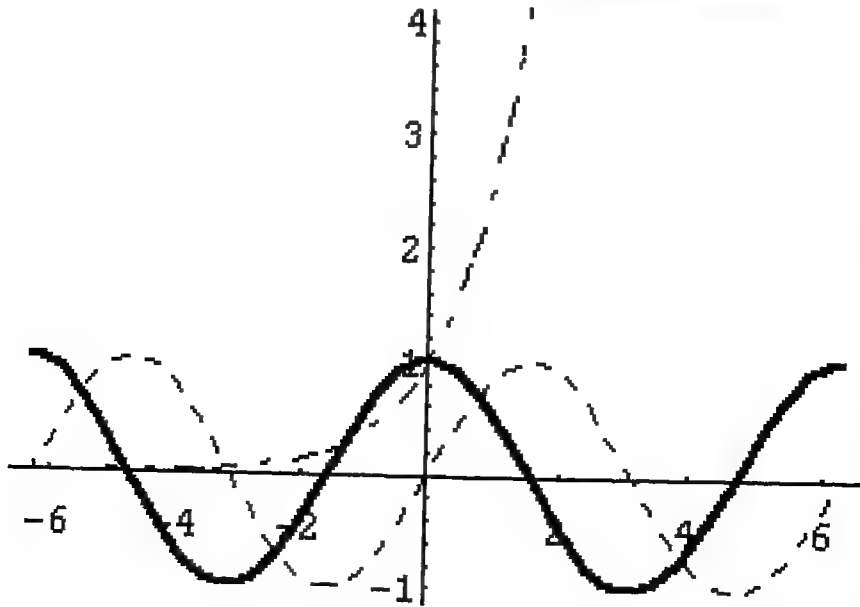
In[11]:Head[3+4I]

عند تطبيق الدالة Head على العدد 3+4I فإن

Out[11]:=Complex

الناتج يكون عدد مركب Complex

## الباب الثانى ماثيماتىكا والدوال العددية



فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتىكا  
والخاصة بالموضوعات الآتية :

- |                             |                         |
|-----------------------------|-------------------------|
| Numerical Calculations      | ١ . الحسابات العددية    |
| Number Systems              | ٢ . الأنظمة العددية     |
| Variables                   | ٣ . المتغيرات           |
| Some Mathematical Functions | ٤ . بعض الدوال الرياضية |
| Complex Numbers             | ٥ . الأعداد المركبة     |



## الباب الثانى

### ماثيماتىكا والدوال العددية

برنامج ماثيماتىكا يحتوى على العديد من الدوال العددية وكما علمنا فإن ماثيماتىكا يتيح للمستخدم الاستعلام عن كافة الأوامر والدوال باستخدام الرمز ؟ لذلك يمكن استخدام هذا الرمز للاستعلام عن جميع أوامر ودوال ماثيماتىكا لتتعرف على الصيغة العامة لكل من هذه الأوامر وسوف نعطى أمثلة توضيحية لكل أمر من هذه الأوامر .

#### ١. الحسابات العددية Numerical Calculations

فى ماثيماتىكا يوجد أربعة أنواع من الأعداد. وهى

Integers	- الأعداد الصحيحة
Rational	- الأعداد النسبية
Real	- الأعداد الحقيقية
Complex	- الأعداد المركبة

ويستخدم ماثيماتىكا رموز المؤثرات الحسابية المعروفة وهى

+	مؤثر الجمع
-	مؤثر الطرح
*	مؤثر الضرب
/	مؤثر القسمة
^	مؤثر الرفع الى أس

$x^y$	Power	الرفع إلى أس
$x + y$	Add	الجمع
$x - y$	Subtraction	الطرح
$xy$ (or) $x*y$	Multiply	الضرب
$x/y$	Divide	القسمة

### المؤثرات الحسابية في ماتيماتكا

ويمكن استخدام ماتيماتكا كأداة لأجراء العمليات الحسابية تماما مثل الآلة الحاسبة . Calculator

In[1]:=3.5+6.823

لحساب مجموع عددين

Out[1]= 10.323

In[2]:=2.5/7.3

لحساب خارج قسمة عددين

Out[2]= 0.342466

ونلاحظ أن الناتج عدد في الصورة العشرية

In[3]:= (7^2-25\*3)/(23+5^4)+42 عند إدخال هذه الكمية الحسابية نلاحظ أن الناتج

Out[3]=  $\frac{13595}{324}$

عدد نسبي لأن الأعداد المستخدمة أعداد صحيحة

وعند عمل الحسابات على الآلة الحاسبة العادية فإن النتائج تكون الى دقة معينة ، مثلا عشرة أرقام

عشرية ، ولكن مع ماتيماتكا غالبا ما نحصل على نتائج مضبوطة exact results

في ماتيماتكا نحصل على قيمة مضبوطة للعدد  $2^{100}$  على الرغم من أن الناتج

يحتوى على 31 رقم

In[4]:=2^100

Out[4]=1267650600228229401496703205376

وفي ماثيماتكا يمكن الحصول على ناتج عددي تقريبي للكميات الحسابية وذلك باستخدام الأمر N كما يمكن الحصول على النتائج مقربة الى أي درجة دقة مطلوبة كالاتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
N[expr] or expr//N	للحصول على قيمة عددية للتعبير expr
N[expr,n]	للحصول على قيمة عددية للتعبير expr مقربة الى n من الأرقام العشرية
Rationalize[x]	للحصول على عدد نسبي Rational تقريبي للعدد x
Precision[x]	لمعرفة عدد الخانات العشرية decimal digits في العدد x
Accuracy[x]	لمعرفة عدد الخانات المعنوية Significant digits على يمين العلامة العشرية في العدد x

In[5]:=2^100//N

للحصول على قيمة عددية تقريبية للعدد  $2^{100}$

Out[5]= 1.26765 10<sup>30</sup>

In[6]:= N[2^100,15]

للحصول على  $2^{100}$  مقربا الى 15 من الأرقام العشرية

Out[6]= 1.26765060022823 10<sup>30</sup>

In[7]:= N[%3]                      للحصول على قيمة عددية تقريبية للكمية الحسابية  
Out[7]: 41.9599                      In[3] المدخلة في جملة الإدخال

In[8] := (7^2-25\*3)/(23+5^4)+42//N                      ويمكن عمل ذلك بطريقة أخرى كما يلي  
Out[8]= 41.9599

In[9]:= N[(7^2-25\*3)/(23+5^4)+42,20]                      وللحصول على الناتج من العملية الحسابية  
Out[9]= 41.959876543209876543                      مقربا الى 20 رقم عشري

In[10]:=Rationalize[%]                      وللحصول على الناتج السابق في صورة  
Out[10]=  $\frac{13595}{324}$                       عدد نسبي تقريبي

In[11] := Precision[%9]                      لمعرفة عدد الخانات العشرية في العدد  
Out[11]= 20                      In[9] الناتج من جملة الإدخال

In[12] := Accuracy[%9]                      لمعرفة عدد الخانات المعنوية على يمين  
Out[12]= 18                      العلامة العشرية في العدد الناتج من  
In[9] جملة الإدخال

## ٢ . الأنظمة العددية Number Systems

النظام العشري Decimal System يعتبر أقدم نظام عددي عرفه الإنسان فقد ابتكره القدماء المصريين منذ حوالي 3400 سنة قبل الميلاد وهو من أشهر الأنظمة العددية وأكثرها انتشاراً ، والأرقام المستخدمة في النظام العشري هي 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 ، وعددها عشرة أرقام لذلك فإن أساس Base النظام العشري يساوي 10 ، ومع ظهور الحاسبات الآلية ظهرت الحاجة الى استخدام أنظمة عددية أخرى وفي الجدول الآتي نوضح بعض الأنظمة العددية وأساس كل نظام والأرقام المستخدمة فيه .

الأنظمة العددية	أساس النظام Base	الأرقام المستخدمة
النظام الثنائي Binary System	2	0 , 1
النظام الثماني Octal System	8	0,1,2,3,4,5,6,7
النظام السداسي عشري Hexadecimal System	16	0,1,2,3,4,5,6,7, 8,9,a,b,c,d,e,f

وفي برنامج ماتيماتكا يمكن تحويل الأعداد الصحيحة أو الكسرية بين الأنظمة العددية المختلفة ، وإذا كان أساس النظام الذي يتم التعامل معه أكبر من 10 فإنه يتم استخدام الحروف الأبجدية من a الى z حيث a تمثل 10 ، b تمثل 11 ، c تمثل 12 وهكذا ، ويتم التحويل بين الأنظمة العددية المختلفة كالآتي :

$b^{nnnnn}$	لتحويل العدد $nnnnn$ من النظام ذو الأساس $b$ الى النظام العشري
<b>BaseForm[x,b]</b>	لتحويل العدد $x$ من النظام العشري الى النظام ذو الأساس $b$ والنتج يحتوى على أساس النظام الخول إليه

In[1]:=2^^101101

لتحويل العدد  $(101101)_2$  من النظام الثنائي

Out[1]=45

الى النظام العشري

In[2]:=BaseForm[45,2]

لتحويل العدد 45 من النظام العشري الى

Out[2]=101101<sub>2</sub>

النظام الثنائي

In[3]:=16^^a3bf

لتحويل العدد  $(a3bf)_{16}$  من النظام السداسي

Out[3]=41919

عشري الى النظام العشري

In[4]:=BaseForm[16^^bf3,2]

لتحويل العدد  $(bf3)_{16}$  من النظام السداسي

Out[4]=101111110011<sub>2</sub>

عشري الى النظام الثنائي

In[5]:=BaseForm[16^^bf3,8]

لتحويل العدد  $(bf3)_{16}$  من النظام السداسي

Out[5]= 5763<sub>8</sub>

عشري الى النظام الثماني

In[6]:=2^^10111.1101

لتحويل العدد الكسري  $(10111.1101)_2$  من

Out[6]= 23.8

النظام الثنائي الى النظام العشري

In[7]:=BaseForm[N[Sqrt[2]],2]

لتحويل العدد الحقيقي  $\sqrt{2}$  من النظام

Out[7]= 1.0110101000001001111<sub>2</sub>

العشري الى النظام الثنائي

وفي ماتيماتكا يمكن إجراء العمليات الحسابية المعروفة من جمع وطرح وضرب وقسمة على الأعداد في الأنظمة العددية المختلفة .

In[8]:=2^^1101001+2^^101111

حساب مجموع عددين في النظام الثنائي

Out[8]=152

والناتج يكون في النظام العشري

In[9]:=BaseForm[2^^1101001+2^^101111,2]

حساب مجموع عددين في النظام الثنائي

Out[9]=10011000<sub>2</sub>

والناتج يكون في النظام الثنائي

In[10]:=BaseForm[2^^11011.1011-2^^101111.1001,2]      حساب حاصل طرح عددين في  
 Out[10]=-10011.111      النظام الثنائي والناتج في النظام الثنائي

In[11]:=BaseForm[8^^36.72+8^^74.02,8]      حساب مجموع عددين في النظام الثماني  
 Out[11]=132.74      والناتج يكون في النظام الثماني

In[12]:=BaseForm[16^^af5.e6-16^^fe.9ab,16]      حساب مجموع عددين في النظام  
 Out[12]=9f7.4b      السداسي عشري

In[13]:=2^^101 2^^110      حساب حاصل ضرب عددين في النظام  
 Out[13]=30      الثنائي والناتج يكون في النظام العشري

In[14]:=BaseForm[2^^11011.101/2^^110.011,2]      حساب خارج قسمة عددين في  
 Out[14]=100.010101010101011      النظام الثنائي

In[15]:=BaseForm[16^^af6.ec4/16^^ec.fa3,16]      حساب خارج قسمة عددين في  
 Out[15]=b.d83e      النظام السداسي عشري

### ٣ . المتغيرات Variables

عند عمل الحسابات في ماتيماتكا يكون من المفيد دائما إعطاء أسماء للقيم العددية أو للكميات الحسابية الناتجة ويتم ذلك بإدخال أسماء متغيرات **variables** لهذه القيم أو للكميات الحسابية .

<b>x=value</b>	لوضع القيمة value داخل المتغير x
<b>x=y=value</b>	لوضع القيمة value لكل من المتغيرات x,y
<b>x=.</b>	لحذف أى قيمة تم إحلالها من قبل للمتغير x

وعند اختيار أسماء للمتغيرات داخل ماتيماتكا يجب مراعاة الآتى :

- فى أسماء المتغيرات لا يوجد أى قيود على عدد الحروف أو الأرقام المستخدمة فى أسم المتغير ويجب عدم استخدام العلامات الخاصة ( + , / , ^ , . ) فى أسم المتغير .
- أسم المتغير لا يبدأ بعدد فمثلا  $2x$  تمثل حاصل الضرب  $2 * x$  بينما  $x2$  تمثل أسم للمتغير .
- فى ماتيماتكا يمكن استخدام الحروف الكبيرة والصغيرة upper and lower-case letters فى أسماء المتغيرات ولكن يجب ان يبدأ أسم المتغير بحرف ابجدي صغير lower-case letter حتى لا يحدث تداخل بين أسماء المتغيرات التى نقوم بتعريفها وبين أسماء المتغيرات أو الدوال المعرفة داخل بناء ماتيماتكا built-in .
- داخل العمل فى ماتيماتكا فإن أسم المتغير يحتفظ بالقيمة التى يتم إحلالها داخله حتى يقوم المستخدم بتغيرها أو حذفها فمثلا إذا وضعنا  $x=5$  فإن ماتيماتكا يفترض انك تريد دائما للمتغير x أن يكون له القيمة 5 داخل الدفتر notebook الذى نتعامل معه ألا إذا قمت بتغيرها أو حذفها .

In[1]:=x=5      لجعل المتغير x له القيمة 5 يكتب x=5  
Out[1]=x=5

In[2]:=x^2      وعند ظهور x فى أي عملية بعد ذلك  
Out[2]=25      سرف تستبدل بالقيمة 5

In[3]:=x=7      عند إعطاء قيمة جديدة للمتغير x فإنه يتم  
Out[3]=x=7      إلغاء القيمة السابقة والتعامل مع القيمة الجديدة .

In[4]:=x^2      عند حساب  $x^2$  يتم التعامل مع القيمة  
Out[4]=49      الجديدة للمتغير x

In[5]:= x=.      يمكن إلغاء القيمة المخزنة فى المتغير x  
      باستخدام المؤثر . =

In[6]=x      وعند الاستعلام عن قيمة x يتم  
Out[6]=x      طباعة x بدون قيمة

وفى ماتيماتكا يمكن كتابة اكثر من عملية رياضية على سطر واحد بجملة إدخال واحدة بشرط أن يفصل كل عملية عن الأخرى بالفاصلة المنقوطة ( ; ) وفى هذه الحالة فإن ناتج التنفيذ يعطى ناتج آخر عملية تم إدخالها فى السطر أما إذا انتهى سطر الإدخال بالفاصلة المنقوطة ( ; ) فهذا يعنى رغبة المستخدم فى عدم ظهور الناتج .

## ماتيماتيكا - الرياضيات باستخدام الكمبيوتر

إدخال أكثر من عملية رياضية على سطر واحد  
 In[7]:=a=2;b=3;c=a+b;d=a b c  
 في جملة إدخال واحدة ونلاحظ أن ناتج التنفيذ  
 Out[7]=30  
 يكون ناتج آخر عملية مدخلة في السطر

في حالة أنها السطر بالفاصلة المنقوطة ; فإنه  
 In[8]:=a=2;b=3;c=a+b;d=a b c  
 لا تظهر جملة الناتج

ونعرض الآن بعض الملاحظات التي يجب مراعاتها عند استخدام المتغيرات في ماتيماتيكا  
 $x y$  تعني حاصل ضرب المتغير  $x$  في المتغير  $y$  أي أن وجود مسافة بين  
 المتغيرين يعني إجراء عملية الضرب

$xy$  تعني متغير له الاسم  $xy$

$5x$  تعني حاصل ضرب 5 في المتغير  $x$  أي أنه يمكن الاستغناء عن المسافة  
 أو علامة الضرب \* بين عدد ومتغير بشرط أن يكون العدد أولاً

$x5$  تعني متغير له الاسم  $x5$

$x^2y$  تعني  $x^2 y$  وليس  $x^{2y}$

وفي لغات الحاسب المعروفة مثل لغة الفورتران FORTRAN أو لغة السي C فإنه  
 يجب على المستخدم الإعلان Declaration عن أسماء المتغيرات قبل استخدامها فمثلاً إذا كتبنا  
 في برنامج فورتران جملة مثل  $x=5$  وكان المتغير  $x$  لم يتم الإعلان عنه في بداية البرنامج فإن

مترجم لغة الفورتران يرفض ترجمة البرنامج ويعطى رسالة تفيد بوجود متغير لم يتم الإعلان عنه ، ولكن فى برنامج ماثيماتكا يختلف الوضع تماما حيث لا يطلب ماثيماتكا الإعلان عن المتغيرات التى نستخدمها داخل العمل فى دفتر معين notebook وانما يقوم ماثيماتكا بحفظ أسماء المتغيرات التى تدخل اليه مستخدما فى ذلك نظام السياقات Context الذى يشبه نظام الفهارس المستخدم فى نظام التشغيل DOS وهذا يعنى انه يمكن وضع كل مجموعة من المتغيرات فى سياق معين وهذا النظام يتيح للمستخدم إعادة استخدام أسماء المتغيرات فى السياقات المختلفة وذلك لان الاسم الكامل لاي متغير هو الاسم الذى نعطيه له بالإضافة الى اسم السياق الذى نضعه فيه وهذا يتيح للمستخدم الحرية والسهولة فى التعامل مع المتغيرات داخل ماثيماتكا دون الإعلان عنها . ومن اهم السياقات فى ماثيماتكا السياق Global وهو السياق الفعال عند تشغيل البرنامج ويضع فيه ماثيماتكا كل المتغيرات التى نقوم بتعريفها ما لم ننص على وضعها فى سياق آخر ، والسياق System ويضع فيه ماثيماتكا كل الأوامر والدوال الموجودة فيه built-in ، ولكن يجب على المستخدم مراعاة حذف قيم المتغيرات التى تم الانتهاء من التعامل معها فى سياق معين حتى لا يحدث خطأ فى استخدام قيم لا نريدها للمتغيرات .

وضع القيمة 8 فى المتغير x In[9]:=x=8;

للاستعلام عن التعريف الذى يحتفظ به ماثيماتكا  
للمتغير x ومعرفة السياق الموجود به المتغير x  
In[10]:=?x  
Global`x  
x=8

وبالإضافة الى المؤثرات الحسابية توجد المؤثرات العلاقية Relational Operators  
والتي تربط متغيرات أو تعبيرات رياضية ويكون الناتج كمية منطقية صواب True أو خطأ False .

المؤثر العلاقى	العمل الذى يقوم به المؤثر العلاقى
$x=y$	إحلال قيمة $y$ داخل المتغير $x$
$x==y$	اختبار ما إذا كان $x$ يساوى $y$
$x>y$	اختبار ما إذا كان $x$ اكبر من $y$
$x>=y$	اختبار ما إذا كان $x$ اكبر من أو يساوى $y$
$x<y$	اختبار ما إذا كان $x$ اقل من $y$
$x<=y$	اختبار ما إذا كان $x$ اقل من أو يساوى $y$
$x!=y$	اختبار ما إذا كان $x$ لا تساوى $y$

In[11]:=x=6;y=8;z=3;x>y-z

Out[11]= True

إحلال القيم 6,8,3 الى المتغيرات  $x, y, z$

على الترتيب ثم اختبار ما إذا كان  $x > y - z$

ونلاحظ ان الناتج يكون الكمية المنطقية True

In[12]:=x==y

Out[12]= False

اختبار ما إذا كان  $x$  اكبر من أو يساوى  $y$

ونلاحظ ان الناتج يكون الكمية المنطقية False

كذلك يوجد نوع آخر من المؤثرات هو المؤثرات المنطقية Logical Operations والتي تربط كميات منطقية  $p, q$  ويكون الناتج كمية منطقية صواب True أو خطأ False .

المؤثر العلاقي	العمل الذي يقوم به المؤثر العلاقي
$!p$	Not p
$p \&\& q$	p and q
$p \parallel q$	p or q

ومن المعلوم ان جدول الصواب والخطأ للمؤثرات العلاقية يكون في الصورة

p	q	! p	$p \&\& q$	$p \parallel q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

In[13]:= a=4;b=7;c=5;

إحلال القيم 4,7,5 الى المتغيرات a , b , c  
على الترتيب

In[14]:=b>=a+c&& a<c

Out[14]= False

اختبار ما إذا كان  $b \geq a+c$  and  $a < c$   
ونلاحظ ان الناتج يكون الكمية المنطقية False

In[15]:=b>=a+c || a<c

Out[15]= True

اختبار ما إذا كان  $b \geq a+c$  or  $a < c$   
ونلاحظ ان الناتج يكون الكمية المنطقية True

## ٤ . بعض الدوال الرياضية Some Mathematical Functions

يوجد داخل بناء ماثميكا اكثر من 1000 دالة معرفة الى جانب العديد من الدوال المعرفة في حزم خارجية External Packages وهذه الدوال لها أسماء داخل ماثميكا وفقا للقواعد الآتية :

- يتكون أسم الدالة من الكلمات الإنجليزية الكاملة لأسم الدالة أو الاختصار الرياضي لأسم الدالة .

- الحرف الأول من كل كلمة word في أسم الدالة يكتب كبير Capital وباقي حروف الكلمة يكتب صغير lower-case letter .

- إذا انتهى أسم الدالة بالحرف Q فهذا يعنى ان الدالة تمثل سؤال منطقي وتكون الإجابة صواب True أو خطأ False .

ونتعرف الآن على بعض الدوال العددية الموجودة في ماثميكا ووظيفة كل منها ،

الدالة في ماتيماتيكاً	الدالة الرياضية
Sqrt[x]	$\sqrt{x}$ دالة الجذر التربيعي
Exp[x]	$e^x$ الدالة الآسية
Log[x]	$\log_e x$ دالة اللوغاريتم للأساس الطبيعي
Log[b,x]	$\log_b x$ دالة اللوغاريتم للأساس b
Sin[x] , Cos[x] , Tan[x] Csc[x] , Sec[x] , Cot[x]	الدوال المثلثية Trigonometric Functions حيث x مقاسه بالتقدير الدائري
ArcSin[x], ArcCos[x], ArcTan[x] ArcCsc[x] , ArcSec[x] , ArcCot[x]	الدوال المثلثية العكسية Inverse Trigonometric Functions
Sinh[x] , Cosh[x] , Tanh[x] Csch[x] , Sech[x] , Coth[x]	الدوال الزائدية Hyperbolic Functions
ArcSinh[x], ArcCosh[x], ArcTanh[x] ArcCsch[x], ArcSech[x], ArcCoth[x]	الدوال الزائدية العكسية Inverse Hyperbolic Functions
Abs[x]	$ x $ القيمة المطلقة
Max[x1,x2,...]	إيجاد أكبر عدد من الأعداد $x_1, x_2, \dots$
Min[x1,x2,...]	إيجاد أصغر عدد من الأعداد $x_1, x_2, \dots$

In[1]:=Sqrt[3]/N  
Out[1]=1.73205

حساب قيمة عددية للجذر التربيعي  $\sqrt{3}$

In[2]:=Exp[2.5]  
Out[2]=12.1825

حساب قيمة  $e^{2.5}$

In[3]:=Log[2,]  
Out[3]=8

حساب قيمة  $\log_2 256$

In[4]:=Sin[2]/N  
Out[4]=0.909297

حساب قيمة عددية لدالة الجيب  $\sin(2)$

In[5]:=ArcCos[.5]  
Out[5]=1.0472

حساب قيمة دالة جيب التمام العكسية  $\cos^{-1}(.5)$

In[6]:=Sinh[4]/N

Out[6]=27.2899

حساب قيمة عددية لدالة الجيب الزائدية  $\sinh(4)$

In[7]:=Abs[-5]

Out[7]=5

حساب القيمة المطلقة  $|-5|$

In[8]:=Max[9,4,-6,3,8,12]

Out[8]=12

حساب العدد الأكبر من قائمة الأعداد

{9,4,-6,3,8,12}

In[9]:=Min[9,4,-6,3,8,12]

Out[9]=-6

حساب العدد الأصغر من قائمة الأعداد

{9,4,-6,3,8,12}

وفي ماتيماتكا يوجد بعض الثوابت الرياضية Mathematical Constants لها أسماء معينة

<b>I</b>	$i = \sqrt{-1}$
<b>Infinity</b>	$\infty$
<b>Pi</b>	$\pi \approx 3.14159$
<b>Degree</b>	$\pi / 180$
<b>E</b>	$e \approx 2.71828$
<b>GoldenRatio</b>	$(1 + \sqrt{5}) / 2 \approx 1.61803$

In[10]:=N[Pi^2]

Out[10]= 9.8696

لحساب القيمة العددية للثابت

$\pi$  مرفوع للأس 2

In[11]:=Sin[Pi/2]

Out[11]=1

لحساب قيمة  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

In[12]:=Cos[60 Degree]/N

Out[12]=0.5

لحساب قيمة  $\cos(60^\circ)$

حيث الزاوية مقاسه بالتقدير الستيني

In[13]:=E^2/N

Out[13]=7.3890

لحساب قيمة  $e^2$

الصيغة العامة للدالة في ماتيماتكا	الوظيفة التي تقوم بها الدالة
<b>Round[x]</b>	للحصول على اقرب عدد صحيح من x
<b>Floor[x]</b>	للحصول على اكبر عدد صحيح اقل من أو يساوى x
<b>Ceiling[x]</b>	للحصول على اصغر عدد صحيح اكبر من أو يساوى x.

والجدول الآتي يوضح عمل هذه الدوال عند تطبيقها على بعض الأعداد

X	Round[x]	Floor[x]	Ceiling[x]
2.4	2	2	3
2.5	2	2	3
2.6	3	2	3
-2.4	-2	-3	-2
-2.5	-2	-3	-2
-2.6	-3	-3	-2

الصيغة العامة للدالة في ماتيماتيكا	الوظيفة التي تقوم بها الدالة
<b>Mod[m, n]</b>	إيجاد باقى خارج القسمة $\frac{m}{n}$ ( m modulo n )
<b>Quotient[m,n]</b>	إيجاد الجزء الصحيح من خارج القسمة $\frac{m}{n}$
<b>GCD[n1,n2,...]</b>	إيجاد القاسم المشترك الأعلى للأعداد n1 , n2 , ...
<b>LCM[n1,n2,...]</b>	إيجاد المضاعف المشترك الأدنى للأعداد n1 , n2 , ...
<b>Divisors[n]</b>	إيجاد قائمة بالأعداد الصحيحة التي تقسم العدد n
<b>Prime[k]</b>	إيجاد العدد الأولي رقم k
<b>PrimeQ[n]</b>	إذا كان العدد n عدد أولي فإن الناتج يكون صواب True وخلاف ذلك يكون الناتج خطأ False

In[14]:=Mod[17,3]

حساب باقى قسمة 17 على 3

Out[14]=2

In[15]:=Quotient[17,3]

حساب الجزء الصحيح من خارج قسمة 17 على 3

Out[15]=5

In[16]:=GCD[12,16,24]

حساب القاسم المشترك الأعلى للأعداد 12 , 16, 24

Out[16]=4

وهو يمثل أكبر عدد صحيح يقسم العددين

In[17]:=LCM[12,16,24]

حساب المضاعف المشترك الأدنى

Out[17]=48

للأعداد 12 , 16 , 24

In[18]:=Divisors[24]

عمل قائمة تحتوى على قواسم

Out[18]={1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

العدد 24

In[19]:=Prime[100]

الحصول على العدد الأولي رقم 100

Out[19]=541

In[20]:=PrimeQ[81]

اختبار ما إذا كان العدد 81 عدد أولي

Out[20]=False

الوظيفة التى تقوم بها الدالة	الصيغة العامة للدالة فى ماتيماتكا
حساب دالة مضروب $n$	$n!$
معامل ذات الحدين $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$	<b>Binomial</b> [n, m]
تحديد إشارة $x$ وتكون $+1$ إذا كان $x > 0$ $0$ أو $0$ إذا كان $x=0$ أو $-1$ إذا كان $x < 0$	<b>Sign</b> [x]
للحصول على عدد عشوائى محصور بين $0, 1$	<b>Random</b> []
للحصول على عدد عشوائى من النوع <b>type</b> وفى المدى <b>range</b> ، والنوع <b>type</b> قد يكون حقيقى <b>Real</b> أو صحيح <b>Integer</b> أو مركب <b>Complex</b> والمدى <b>range</b> يكون بالصورة <b>{min , max}</b>	<b>Random</b> [type, range]
للحصول على عدد عشوائى من النوع <b>type</b> وفى المدى <b>range</b> وبدقة <b>n</b> من الأرقام العشرية	<b>Random</b> [type, range,n]

In[21]:=30!

حساب قيمة مضروب 30

Out[21]=265252859812191058636308480000000

In[22]:=30!/N

حساب قيمة عددية تقريبية لمضروب 30

Out[22]=2.65253 10<sup>32</sup>

In[23]:=Binomial[8,3]

حساب قيمة معامل ذات الحدين  $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!}$

Out[23]=56

In[24]:=Random[]

للحصول على عدد عشوائي محصور بين 0,1

Out[24]=0.440108

In[25]:=Random[Integer,{10,50}]

للحصول على عدد صحيح عشوائي

Out[25]=32

محصور بين 10 , 50

In[26]:=Random[Real,{2.5,20},15]

للحصول على عدد حقيقي عشوائي محصور

Out[26]=7.57929458180578

بين 2.5 , 20 وبدقة 15 رقم عشري

## ٥ . الأعداد المركبة Complex Numbers

في ماتيماتكا يمكن التعامل مع الأعداد المركبة التي على الصورة  $x + Iy$  حيث  $I$  يمثل المقدار التخيلي  $\sqrt{-1}$  وفيما يأتي نعرض بعض العمليات على الأعداد المركبة

$x + Iy$	العدد المركب $x + iy$
$\text{Re}[z]$	الجزء الحقيقي من العدد المركب $z$
$\text{Im}[z]$	الجزء التخيلي من العدد المركب $z$
$\text{Conjugate}[z]$	العدد المرافق للعدد المركب $z$
$\text{Abs}[z]$	القيمة المطلقة للعدد المركب $z$
$\text{Arg}[z]$	سعة العدد المركب $z$ حيث $z =  z  e^{i \arg(z)}$

بعض العمليات على الأعداد المركبة

## ماتيماتكا - الرياضيات باستخدام الكمبيوتر

ويقوم ماتيماتكا بأجراء العمليات الجبرية على الأعداد المركبة من جمع وطرح وضرب وقسمة وكذلك يمكن حساب قيمة الجذر التربيعي والدوال الآسية واللوغارتمية والمثلثية والزائدية ففى حالة الأعداد المركبة .

In[1]:=Sqrt[-4]

حساب الجذر التربيعي للعدد التخيلي -4

Out[1]=2I

والنتاج هو العدد التخيلي 2I

In[2]:=Sqrt[3+2I]/N

حساب القيمة العددية للجذر التربيعي

Out[2]= 1.81735 + 0.550251 I

للعدد المركب 3+2I

In[3]:=Exp[2+7I]/N

حساب القيمة العددية للدالة الآسية

Out[3]=5.57063 + 4.85451 I

المركبة  $e^{2+7I}$

In[4]:=Log[-2]

حساب قيمة  $\log(-2)$

Out[4]:=I Pi + Log[2]

ونلاحظ أن الناتج يكون عدد مركب

-In[5]:=Log[

ولحساب القيمة العددية للمقدار المركب  $\log(-2)$

2]/N

Out[5]=0.693147 + 3.14159 I

In[6]:=Log[3+4I]/N

حساب القيمة العددية للدالة اللوغارتمية

Out[6]=1.60944 + 0.927295 I

المركبة  $\log(3+4I)$

In[7]:=Abs[2+3I]

لحساب القيمة المطلقة للعدد المركب 2 + 3 I

Out[7]= Sqrt[13]

In[8]:=Abs[2+3I]/N

ولحساب القيمة العددية لدالة القيمة

Out[8]=3.60555

المطلقة  $|2 + 3 I|$

In[9]:=z1=3+5I;z2=4-6I;

لتعريف الأعداد المركبة  $z1, z2$

In[10]:=z1+z2

لحساب مجموع العددين المركبان  $z1 + z2$

Out[10]=7 - I

In[11]:=z1 z2

لحساب حاصل ضرب العددين المركبان  $z1 \times z2$

Out[11]=42 + 2 I

In[12]:=z1/z2

لحساب خارج قسمة العددين المركبان  $\frac{z1}{z2}$

Out[12]= $-\frac{9}{26} + \frac{19}{26} I$

In[13]:=z1/z2//N

لحساب قيمة عددية لخارج قسمة العددين المركبان

Out[13]=-0.346154 + 0.730769 I

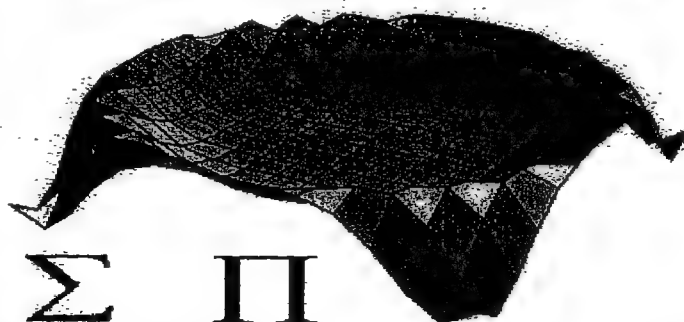
In[14]:=Arg[z1]/N

لحساب سعة العدد المركب  $z1$

Out[14]=1.03038



## الباب الثالث ماثيماتكا والجبر



في هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتكا  
والخاصة بالموضوعات الآتية :

١ . كثيرات الحدود والنوال الكسرية **Polynomials & Rational Functions**

٢ . المتسلسلات **Series**

٣ . حل المعادلات **Solving Equations**

٤ . الجبر الخطي **Linear Algebra**

اولا : القوائم	<b>Lists</b>
ثانيا : المصفوفات	<b>Matrices</b>
ثالثا : حل الأنظمة الخطية	<b>Solving Linear Systems</b>
رابعا : القيم المميزة والمتجهات المميزة	<b>Eigenvalues and Eigenvectors</b>



## الباب الثالث

### ماثيماتكا والجبر

من الأشياء الهامة في برنامج ماثيماتكا هو القدرة على القيام بالحسابات على المقادير الرمزية Symbolic الى جانب المقادير العددية Numeric وهذا يعنى أن ماثيماتكا يستطيع التعامل مع الصيغ والمقادير الجبرية تماما مثل التعامل مع الأعداد .

#### ١ . كثيرات الحدود والدوال الكسرية Polynomials and Rational Functions

برنامج ماثيماتكا يقدم عدد كبير من الأوامر للتحويل بين الأشكال المختلفة للتعبيرات الجبرية وأجراء العمليات الجبرية على كثيرات الحدود Polynomials وسوف نتعرف فيما يأتي على بعض هذه الأوامر مع توضيح الوظيفة والصيغة العامة لكل من هذه الأوامر ونعطي أمثلة توضيحية .

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
<b>Factor[poly]</b>	تحليل كثيرة الحدود <b>Poly</b> الى قوى صحيحة
<b>Expand[expr]</b>	إيجاد مفكوك حاصل الضرب والقوى الصحيحة الموجبة الموجودة فى البسط للتعبير <b>expr</b>
<b>ExpandAl[expr]</b>	إيجاد مفكوك حاصل الضرب والقوى الصحيحة الموجبة الموجودة فى كل أجزاء التعبير <b>expr</b>
<b>Together[expr]</b>	توحيد المقامات <b>denominators</b> للكسور الموجودة فى التعبير <b>expr</b>
<b>Apart[expr]</b>	كتابة التعبير الكسرى <b>expr</b> على صورة مجموع لكسوره الجزئية
<b>Simplify[expr]</b>	إيجاد صورة مبسطة للتعبير <b>expr</b> بأصغر عدد ممكن من الأجزاء
<b>Collect[expr,x]</b>	تجميع الحدود التى تحتوى على نفس قوى <b>x</b> فى التعبير <b>expr</b>

In[1]:=Factor[x^2+2x-3]

لتحليل كثيرة الحدود  $x^2 + 2x - 3$

Out[1]= (x+3)(x-1)

إلى عواملها

In[2]:=Expand[%]

الأمـر Expand هو عكس الأمر Factor

Out[2]=  $x^2 + 2x - 3$

ويقوم بفك الأقواس

In[3]:=Factor[8x^3+36x^2+54x+27]

لتحليل كثيرة الحدود

Out[3]=  $(3 + 2x)^3$

$8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

إلى عواملها

تعريف المقدار الجبري rrr ثم إيجاد مفكوك القوى الصحيحة الموجبة وكذلك حاصل الضرب الموجود في البسط للمقدار الجبري rrr

In[4]:=rrr=(x-1)^2 (x+2)/((x+1)(x-3)^2);Expand[rrr]

Out[4]=  $\frac{2}{(-3+x)^2(1+x)} - \frac{3x}{(-3+x)^2(1+x)} + \frac{x^3}{(-3+x)^2(1+x)}$

In[5]:=Together[%]

توحيد المقامات للكسور الموجودة في المقدار

$$\text{Out[5]: } \frac{2 - 3x + x^3}{(-3 + x)^2(1 + x)}$$

الجبري الناتج من جملة الإخراج السابقة

إيجاد مفكوك القوى الصحيحة الموجبة وكذلك حاصل الضرب الموجود في كل المقدار الجبري rrr

In[6]:=ExpandAll[rrr]

$$\text{Out[6]= } \frac{2}{9+3x-5x^2+x^3} - \frac{3x}{9+3x-5x^2+x^3} + \frac{x^3}{9+3x-5x^2+x^3}$$

In[7]:=Apart[rrr]

كتابة المقدار الجبري rrr في صورة

$$\text{Out[7]= } 1 + \frac{5}{(-3+x)^2} + \frac{19}{4(-3+x)} + \frac{1}{4(1+x)}$$

كسوره الجزئية

In[8]:=Simplify[%7]

تبسيط شكل الناتج من جملة الإخراج

$$\text{Out[8]= } \frac{(-1+x)^2(2+x)}{9+3x-5x^2+x^3}$$

السابقة Out[7]

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
<b>Collect[expr, x]</b>	تجميع الحدود التى تحتوى على نفس قوى $x$ فى التعبير $expr$
<b>Coefficient[expr, form]</b>	الحصول على معامل $form$ فى كثيرة الحدود $expr$
<b>Length[expr]</b>	الحصول على عدد العناصر الموجودة فى التعبير $expr$
<b>Exponent[expr,form]</b>	الحصول على أكبر قوى للمقدار $form$ فى التعبير $expr$

**In[9]:=r1=Expand[(2x+y+1)^2]** إيجاد مفكوك المقدار الجبرى  $(2x + y + 1)^2$   
**Out[9]= 1 + 4 x + 4 x<sup>2</sup> + 2 y + 4 x y + y<sup>2</sup>** ووضع الناتج فى المتغير  $r1$

**In[10]:=Collect[r1,y]** تجميع الحدود التى تحتوى على نفس قوى المتغير  $y$  فى التعبير الجبرى  $r1$   
**Out[10]= 1 + 4 x + 4 x<sup>2</sup> + (2 + 4 x) y + y<sup>2</sup>**

**In[11]:=Coefficient[r1,y]** للحصول على معامل  $y$  فى التعبير الجبرى  $r1$   
**Out[11]=2 + 4 x**

**In[12]:=Exponent[r1,y]** للحصول على أكبر قوى للمتغير  $y$  فى التعبير الجبرى  $r1$   
**Out[12]=2**

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
<b>Numerator[expr]</b>	الحصول على البسط فى التعبير <b>expr</b>
<b>Denominator[expr]</b>	الحصول على المقام فى التعبير <b>expr</b>
<b>PolynomialQuotient[p, q, x]</b>	إيجاد خارج قسمة <b>p</b> على <b>q</b> مع إهمال الجزء الباقي حيث <b>p, q</b> كثيرات حدود فى المتغير <b>x</b>
<b>PolynomialRemainder[p, q, x]</b>	إيجاد الجزء الباقي من خارج قسمة <b>p</b> على <b>q</b> حيث <b>p, q</b> كثيرات حدود فى المتغير <b>x</b>

**In[13]:=Numerator[rrr]** للحصول على البسط فى التعبير الجبرى **rrr**

**Out[13]=(-1+x)<sup>2</sup> (2+x)**

**In[14]:=Denominator[rrr]** للحصول على المقام فى التعبير الجبرى **rrr**

**Out[14]=(-3+x)<sup>2</sup> (1+x)**

**In[15]:= p=x<sup>3</sup>+5x<sup>2</sup>+4x-6;q=x+1;** تعريف كثيرتى حدود **p, q** ثم

**PolynomialQuotient[p,q,x]** إيجاد خارج قسمة كثيرة الحدود **p** على

**Out[15]=4x<sup>2</sup> +x** كثيرة الحدود **q** مع إهمال الجزء الباقي

**In[16]:=PolynomialRemainder[p,q,x]** للحصول على الجزء الباقي من خارج قسمة

**Out[16]= -6** كثيرة الحدود **p** على كثيرة الحدود **q**

## ٢ . المتسلسلات Series

فى كثير من المسائل الرياضية تنشأ عمليات جمع وضرب للحدود المنتظمة وبرنامج ماتيماتيكا قادر على حساب مثل هذه العمليات . وحساب مجموع حدود المتسلسلة يستخدم الأمر Sum كالآتى :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Sum[f, {i, imax}]	حساب المجموع $\sum_{i=1}^{i \max} f$
Sum[f, {i, imin, imax}]	حساب المجموع $\sum_{i=i \min}^{i \max} f$
Sum[f, {i, imin, imax, step}]	حساب المجموع $\sum_i f$ من $i=i \min$ الى $i=i \max$ بخطوة مقدارها step
Sum[f, {i, imin, imax}, {j, jmin, jmax}, ...]	حساب المجموع $\sum_{i=i \min}^{i \max} \sum_{j=j \min}^{j \max} f$

In[1]:= Sum[1/i^2,{i,1,10}]/N

لحساب مجموع العشرة حدود الأولى

Out[1]=1.54977

من المتسلسلة  $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i^2}$

In[2]:= Sum[i/I^2,{i,1,Infinity}]/N  
Out[2]= 1.64493

ويمكن حساب مجموع عدد لانهاى من  
المتسلسلة بشرط أن تكون المتسلسلة تقاربية

In[3]:=Sum[x^i/i!,{i,1,7,2}]

لحساب المجموع  $\sum_{i=1}^7 \frac{x^i}{i!}$

Out[3]=  $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040}$

In[4]:=Sum[x^i/i!,{i,1,7,2}]

لحساب مجموع  $\sum_{i=2}^7 \frac{x^i}{i!}$  من  $i=2$  الى  $i=7$

Out[4]=  $x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040}$

بخطوة 2=step

In[5]:=Sum[x^i y^j,{i,1,3},{j,1,i}]

لحساب المجموع المزدوج  $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^i x^i y^j$

Out[5]=  $xy + x^2y + x^2y^2 + x^3y + x^3y^2 + x^3y^3$

ويمكن لماتيماتكا إجراء عمليات الضرب على الحدود المنتظمة باستخدام الأمر **Product** كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
<b>Product[f,{i,imax}]</b>	حساب حاصل الضرب $\prod_{i=1}^{imax} f$
<b>Product[f,{i,imin,imax}]</b>	حساب حاصل الضرب $\prod_{i=imin}^{imax} f$
<b>Product[f,{i,imin,imax,step}]</b>	حساب حاصل الضرب $\prod_{i=imin}^{imax} f$ بخطوة مقدارها step
<b>Product[f,{i,imin,imax}, {j,jmin,jmax},...]</b>	حساب حاصل الضرب المزدوج $\prod_{i=imin}^{imax} \prod_{j=jmin}^{jmax} f$

**In[6]:=Product[i^2,{i,1,5}]**

حساب حاصل الضرب  $\prod_{i=1}^5 i^2$

**Out[6]=14400**

**In[7]:=Product[x+i,{i,1,4}]**

حساب حاصل الضرب  $\prod_{i=1}^4 (x+i)$

**Out[7]=(1 + x) (2 + x) (3 + x) (4 + x)**

**In[8]:=Product[(x+i)^j,{i,1,3},{j,1,i}]**

حساب حاصل  $\prod_{i=1}^3 \prod_{j=1}^i (x+i)^j$

**Out[8]=(1 + x) (2 + x)^3 (3 + x)^6**

وبرنامج ماتيماتيكا قادر على حساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة  $f(x)$  حول النقطة  $x = x_0$  لأي عدد  $n$  من الحدود وكذلك حساب مفكوك تيلور لدالة في متغيرين  $f(x,y)$  حول النقطة  $(x_0, y_0)$  وذلك باستخدام الأمر Series كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
<code>Series[f, {x, x0, n}]</code>	حساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة $f$ حول النقطة $x_0$ حتى الحد $(x-x_0)^n$
<code>Series[f, {x, x0, nx}, {y, y0, ny}]</code>	حساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة $f$ على التابع بالنسبة إلى $y$ ثم إلى $x$
<code>Normal[expr]</code>	تحويل <code>expr</code> إلى الشكل العادي بدون أي رموز خاصة

لحساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة  $f(x)$  حول النقطة  $x=a$  حتى الحدود من الدرجة الثالثة

`In[9]:=Series[f[x],{x,a,3}]`

`Out[9]=`

$$f[a] + f'[a](-a+x) + \frac{f''[a](-a+x)^2}{2} + \frac{f^{(3)}[a](-a+x)^3}{6} + O[-a+x]^4$$

لحساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة  $e^x$  حول النقطة  $x = 0$  حتى الحدود من الدرجة الرابعة

In[10]:=Series[Exp[x],{x,0,4}]

$$\text{Out[10]}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+O[x]^5$$

ويمكن إلغاء الحد  $O[x]^5$  وكتابة المفكوك في الشكل العادى وذلك باستخدام الأمر Normal

In[11]:=Normal[%]

$$\text{Out[11]}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$$

لحساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة  $e^{xy}$  حول النقطة  $x = 0$  ,  $y = 0$  حتى الحدود من الدرجة الثالثة فى  $x$  والدرجة الثانية فى  $y$

In[12]:=Series[Exp[x y],{x,0,3},{y,0,2}]

$$\text{Out[12]}=1+(y+O[y]^3)x+(\frac{y^2}{2}+O[y]^3)x^2+O[x]^3$$

ويمكن كتابة المفكوك في الشكل العادى وذلك باستخدام الأمر Normal

In[13]:=Normal[Series[Exp[x y],{x,0,3},{y,0,2}]]

$$\text{Out[13]}=1+xy+\frac{x^2y^2}{2}$$

### ٣ . حل المعادلات Solving Equations

في برنامج ماثميكا المعادلة يكون لها الشكل  $lhs == rhs$  حيث يستخدم المؤثر العلاقي  $==$  وهو يعنى اختبار ما إذا كان الطرف الأيمن  $rhs$  يساوى الطرف الأيسر  $lhs$  ولذلك فإن المعادلات في ماثميكا تعامل على أنها تعبيرات منطقية Logical Statement .

فمثلا عند إدخال المعادلة  $2+3==5$  فإن الناتج يكون صواب True

In[1] := 2+3==5

Out[1]= True

وعند إدخال المعادلة  $x^2 + 3x == 2$  فإن ماثميكا يقوم بإخراج المعادلة فى صورة رمزية لأنه لم يستطع اختبار ما إذا كان  $x^2 + 3x == 2$  صواب أو خطأ نظرا لعدم وجود قيمة سابقة للمتغير  $x$  .

In[2] := x^2+3x==2

Out[2]=  $x^2 + 3x == 2$

والآن لحل المعادلة والحصول على قيم  $x$  التى تمثل جذور المعادلة نستخدم الأمر Roots كالآتى :

**Roots[ $lhs == rhs, var$ ]**

للحصول على قائمة تحوى على جذور المعادلة

،  $lhs == rhs$  بالنسبة للمتغير  $var$  .

الحصول على جذور المعادلة  $x^2+3x=2$  ونلاحظ أن الناتج يكون على صورة تعبير منطقي

In[3]:=Roots[x^2+3x==2,x]

Out[3]=

$$x = \frac{-3 - \text{Sqrt}[17]}{2} \parallel x = \frac{-3 + \text{Sqrt}[17]}{2}$$

وكثيرا ما نحتاج الى استخدام الحل الناتج في حسابات أخرى لذلك يكون من المفيد تحويل الحل

من التعبير المنطقي الى صورة صريحة ويتم ذلك باستخدام الدالة **ToRules**

**ToRules[eqns]** لتحويل حل eqns الناتج من الأمر **Roots** من الصورة المنطقية الى متتابعة من القوائم تحتوي على قواعد صريحة للحل

**{ToRules[eqns]}** لتحويل حل eqns الناتج من الأمر **Roots** من الصورة المنطقية الى قائمة تحتوي على قواعد صريحة للحل

In[4]:=ToRules[%3]

لتحويل الحل الناتج من جملة 3

Out[4]=

الى متتابعة تحتوي على قواعد صريحة للحل

$$\text{Sequence}\left\{\left\{x \rightarrow \frac{-3 - \text{Sqrt}[17]}{2}\right\}, \left\{x \rightarrow \frac{-3 + \text{Sqrt}[17]}{2}\right\}\right\}$$

In[5]:={ToRules[Roots[x^2+3x==2,x]]//N لتحويل الكسور الاعتيادية في الحل

Out[5]={x -> -3.56155}, {x -> 0.561553} الى كسور عشرية والحصول على قيم

عددية نستخدم الدالة **N**

ويمكن حل المعادلة والحصول على جذورها باستخدام الأمر `Solve` كالآتي :

حل المعادلة `eqn` بالنسبة للمتغير `var` `Solve[eqn, var]`

وتعتبر معادلات كثيرات الحدود `polynomial equations` من أهم المعادلات التي يتم حلها باستخدام الأمر `Solve`.

للحصول على جذور المعادلة  $x^2 + 3x = 2$  بالنسبة للمتغير  $x$

`In[6]:=Solve[x^2+3x==2,x]`

`Out[6]= {x ->  $\frac{-3 - \text{Sqrt}[17]}{2}$ }, {x ->  $\frac{-3 + \text{Sqrt}[17]}{2}$ }`

لحساب قيمة عددية تقريبية للحل الناتج من جملة الإدخال رقم 6

`In[7]:= N[%6]`

`Out[7]= {{x -> -3.56155}, {x -> 0.561553}}`

للحصول على جذور المعادلة  $ax + b = c$  بالنسبة للمتغير  $x$

`In[8]:=Solve[a x+b==c,x]`

`Out[8]= {{x ->  $-\left(\frac{b-c}{a}\right)}$ }}`

للحصول على جذور المعادلة  $ax^2 + bx + c = 0$  بالنسبة الى المتغير  $x$

In[9]:=Solve[a x^2+b x+c==0,x]

$$\text{Out[9]} = \left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\} \right\}$$

للحصول على جذور المعادلة  $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$  بالنسبة الى المتغير  $x$

In[10]:=Solve[x^3+3x^2+3x+2==0,x]

$$\text{Out[10]} = \{ \{x \rightarrow -2\}, \{x \rightarrow \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\}, \{x \rightarrow \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\} \}$$

ولحساب قيمة عددية تقريبية للحل الناتج من جملة الإدخال رقم 10

In[11]:=N[%]

Out[11]={{x -> -2.}, {x -> -0.5 - 0.866025 I}, {x -> -0.5 + 0.866025 I}}

ويمكن الحصول على جذور معينة من حل المعادلة باستخدام الأقواس المزدوجة [[ ]]

In[12]:=Solve[x^3+3x^2+3x+2==0,x][[1]] للحصول على الجذر الأول من حل

Out[12]={x -> -2} المعادلة  $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$

In[13]:=Solve[x^3+3x^2+3x+2==0,x][[2]]/N للحصول على قيمة عددية للجذر

Out[13]={x -> -0.5 - 0.866025 I} الثاني من حل المعادلة  $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$

والأمر **Solve** قادر على إيجاد حلول جبرية صريحة للعديد من معادلات كثيرات الحدود ذات الدرجات العالية خاصة المعادلات التي يمكن تحليلها

**In[14]:=**equ1=Expand[Product[x-i,{i,5}]] تعريف كثيرة حدود من الدرجة الخامسة  
**Out[14]=**-120 + 274 x - 225 x<sup>2</sup> + 85 x<sup>3</sup> - 15 x<sup>4</sup> + x<sup>5</sup>

**In[15]:=**Solve[equ1==0,x] حل معادلة كثيرة حدود من الدرجة الخامسة  
**Out[15]=**{{x -> 1}, {x -> 2}, {x -> 3}, {x -> 4}, {x -> 5}}

نلاحظ أننا حصلنا على حل صريح لمعادلة كثيرة الحدود equ1=0 من الدرجة الخامسة .  
 وإذا كان ماثميكا قادر على إيجاد حلول معادلة كثيرة حدود من درجة n فإنه يعطى n من الجذور حتى في حالة وجود جذور مكررة كما في المثال الآتي :

**In[16]:=**Solve[(x+3)(x-1)^2==0,x]  
**Out[16]=**{{x -> -3}, {x -> 1}, {x -> 1}}

وفي حالة عدم استطاعة ماثميكا الحصول على حلول جبرية صريحة فإن ماثميكا تترك المعادلة في صورتها الرمزية ويمكن في هذه الحالة استخدام الدالة N للحصول على حلول عددية

**In[17]:=**Solve[x^5-130x+11==0,x]  
**Out[17]=**{ToRules[Roots[-130 x + x<sup>5</sup> == -11, x]]}

**In[18]:=** Solve[x^5-130x+11==0,x]/N  
**Out[18]=**{{x -> -3.39748}, {x -> -0.0211456 - 3.37698 I},  
 {x -> -0.0211456 + 3.37698 I}, {x -> 0.0846154}, {x -> 3.35515}}

وفي ماتيماتكا يمكن استخدام الأمر Solve لحل بعض المعادلات التي ليست على صورة كثيرات حدود

In[19]:=Solve[Sqrt[1-x]+Sqrt[1+x]==4,x]/N  
Out[19]={{x -> -6.9282 I}, {x -> 6.9282 I}}

وفي برنامج ماتيماتكا يمكن استخدام الأمر Solve لحل مجموعة من المعادلات في وقت واحد كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
Solve[eqns]	حل مجموعة المعادلات eqns بالنسبة الى جميع المتغيرات الموجودة فيها حيث eqns تكتب في صورة قائمة {lhs1==rhs1,lhs2==rhs2,...}
Solve[eqns,vars]	حل مجموعة المعادلات eqns بالنسبة الى المتغيرات vars حيث vars تكتب في صورة قائمة {x1,x2,...}
Solve[eqns, vars, elims]	حل مجموعة المعادلات eqns بالنسبة الى المتغيرات vars فقط وحذف المتغيرات elims من النتائج

In[20]:=Solve[{x+y==1,x-3y==2}]  
Out[20]= {{x-> 5/4 , y-> -1/4}}  
حل المعادلتين بالنسبة الى جميع المتغيرات x , y الموجودة وهي

In[21]:=Solve[{x^2+y^2==5,x+3y==1}]/N  
Out[21]={{x -> -2., y -> 1.}, {x -> 2.2, y -> -0.4}}  
للحصول على قيمة عددية لحل المعادلتين بالنسبة إلى جميع المتغيرات

تعريف القائمة eqns1 وتحتوى على معادلتين فى ثلاث مجاهيل هم  $x, y, z$  ثم حساب الحل بالنسبة الى  $x, y$  فقط

In[22]:=eqns1={y-2x==9,x+3z==1}; Solve[eqns1,{x,y}]

Out[22]={ {y -> 9 - 2 (-1 + 3 z), x -> 1 - 3 z}

حساب حل مجموعة المعادلات eqns1 بالنسبة الى  $y, z$  فقط

In[23]:=Solve[eqns1,{y,z}]

Out[23]={ {y -> 9 + 2 x, z ->  $\frac{1-x}{3}$  }}

تعريف القائمة eqns2 وتحتوى على ثلاث معادلات فى خمسة مجاهيل هم  $x, y, z, w, t$  ثم حساب الحل بالنسبة الى المتغيرات  $x, y, z$  فقط

In[24]:=eqns2={x+2y==z,y+2z==w,z+2w==t};

Solve[eqns2,{x,y,z}]

Out[24]={ {x -> t - 2 w + 2 (-w - 2 (-t + 2 w)),  
y -> w + 2 (-t + 2 w), z -> t - 2 w}}

In[25]:=Solve[eqns1,{x},{z}]

حساب حل مجموعة المعادلات eqns1

Out[25]={ {x ->  $\frac{-9+y}{2}$  }}

بالنسبة الى المتغير x مع حذف المتغير z

In[26]:=Solve[eqns1,{y},{z}]

حساب حل مجموعة eqns1

Out[26]={ {y -> 9 + 2 x}}

بالنسبة الى المتغير y مع حذف المتغير z

In[27]:=Solve[eqns2,{x},{t,w}]      حساب حل مجموعة المعادلات eqns2

Out[27]={{x -> -2 y + z}}      بالنسبة إلى المتغير x مع حذف المتغيرات t,w

In[28]:=Solve[eqns2,{w},{x,y}]      حساب حل مجموعة المعادلات eqns2

Out[28]= {{w->  $\frac{t-z}{2}$ }}      بالنسبة إلى المتغير w مع حذف المتغيرات x,y

وفي برنامج ماتيماتكا يمكن حذف عدد من المتغيرات من مجموعة المعادلات وإعادة كتابتها ويتم ذلك باستخدام الأمر Eliminate كالآتي :

**Eliminate[eqns,elims]**      لحذف المتغيرات elims من مجموعة المعادلات eqns

In[29]:=Eliminate[eqns1,x]      لحذف المتغير x من مجموعة المعادلات eqns1

Out[29]=y == 11 - 6 z

In[30]:=Eliminate[eqns1,z]      لحذف المتغير z من مجموعة المعادلات eqns1

Out[30]=y == 9 + 2 x

In[31]:= Eliminate[eqns2,{x,y}]      لحذف المتغيرات x,y من مجموعة المعادلات eqns2

Out[31]=t == 2 w + z

In[32]:=Eliminate[eqns2,{w,t}]      لحذف المتغيرات w,t من مجموعة المعادلات eqns2

Out[32]=x == -2 y + z

## ٤ . الجبر الخطى Linear Algebra

يعتبر الجبر الخطى جزء اساسى وهام فى دراسة الرياضيات والهندسة والفيزياء وعلوم أخرى ، وبرنامج ماتيماتكا يقدم العديد من الأوامر للعمليات الجبرية الخاصة بالتعامل مع القوائم Lists والمصفوفات Matrices وحلول الأنظمة الخطية Linear Systems وحساب القيم المميزة والمتجهات المميزة لمصفوفة .

### أولا : القوائم Lists

من خلال دراستنا للعديد من الأوامر فى ماتيماتكا مثل

### Sum , Product , Series , ...

نلاحظ أن نطاق العمل فى هذه الأوامر يكتب باستخدام الأقواس { } على صورة قائمة List وتستخدم القوائم فى ماتيماتكا بشكل كبير وبصفة خاصة عند عمل الحسابات عندما يكون هناك حاجة لتنظيم عدد كبير من القيم بغرض التعامل معها كوحدة واحدة ولذلك فبان ماتيماتكا غنى بالعمليات التى يمكن تنفيذها على القوائم ، ولكى نتعرف على هذه العمليات نبدأ بتعريف قائمتين s1 , s2 كل قائمة تحتوى على خمسة عناصر

In[1]:=s1={ a , b , c , d , e }; s2={ 2 , 3 , 4 , 5 , 6};

وتنفذ العمليات الحسابية من جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة على قائمتين يتم على العناصر المتناظرة فى القائمتين بشرط أن يكون القائمتين بهما نفس العدد من العناصر وناتج العملية الحسابية يكون قائمة جديدة .

In[2]:= s1+s2

جمع القائمتين s1 , s2 يتم بجمع

Out[2]={2 + a , 3 + b , 4 + c , 5 + d , 6 + e}

العناصر المتناظرة فى القائمتين

**In[3]:= s1-s2** طرح القائمتين s1 , s2 يتم بطرح

**Out[3]={-2 + a, -3 + b, -4 + c, -5 + d, -6 + e}** العناصر المتناظرة في القائمتين

**In[4]:=s1 s2** ضرب القائمتين s1 , s2 يتم بضرب

**Out[4]={2 a, 3 b, 4 c, 5 d, 6 e}** العناصر المتناظرة في القائمتين

**In[5]:=s1/ s2** قسمة القائمتين s1 , s2 يتم بقسمة

**Out[5]= { $\frac{a}{2}, \frac{b}{3}, \frac{c}{4}, \frac{d}{5}, \frac{e}{6}$ }** العناصر المتناظرة في القائمتين

**In[6]:= s1+2** ويمكن إجراء أي عملية حسابية بين قائمة

**Out[6]: {a+2 , b+2 , c+2 , d+2 , e+2}** وعدد ثابت فمثلا جمع القائمة s1 على العدد

الثابت 2 يتم بإضافة العدد الثابت 2 الى

كل عنصر في القائمة

**In[7]:=3s1** ضرب القائمة s1 في العدد الثابت 3 يتم بضرب

**Out[7]= {3 a, 3 b, 3 c, 3 d, 3 e}** العدد الثابت 3 في كل عنصر من القائمة

**In[8]:=s2^2** ويمكن رفع القائمة الى أس عددي حيث يتم رفع

**Out[8]={4,9,16,25,36}** كل عنصر في القائمة الى هذا الأس العددي

In[9]:= 2^s1

ويمكن رفع أي قيمة عددية الى أس عبارة عن قائمة

Out[9]= { 2<sup>a</sup> , 2<sup>b</sup> , 2<sup>c</sup> , 2<sup>d</sup> , 2<sup>e</sup> }

In[10]:= s1^s2

ويمكن رفع قائمة الى أس عبارة عن قائمة أخرى

Out[10]= { a<sup>2</sup> , b<sup>3</sup> , c<sup>4</sup> , d<sup>5</sup> , e<sup>6</sup> }

حيث يتم رفع كل عنصر في القائمة الأساس الى

أس يساوى العنصر المناظر له في القائمة الأس

ويمكن تطبيق الدوال على القوائم حيث يتم تطبيق الدالة على كل عنصر في القائمة

إيجاد الجذر التربيعي للقائمة s2 حيث يتم حساب الجذر التربيعي لكل عنصر في القائمة

In[11]:= Sqrt[s2]/N

Out[11]= { 1.41421, 1.73205, 2., 2.23607, 2.44949 }

تطبيق دالة الجيب sin على القائمة s2

In[12]:= Sin[s2]/N

Out[12]= { 0.909297, 0.14112, -0.756802, -0.958924, -0.279415 }

وماتيماتكا قادر على إجراء عمليات الفئات Sets على القوائم من خلال العديد من الأوامر والجدول الآتي يوضح بعض الأوامر المستخدمة .

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
<b>Length[list]</b>	إيجاد عدد العناصر فى القائمة <b>list</b>
<b>Sort[list]</b>	ترتيب عناصر القائمة <b>list</b> حيث يتم أولاً ترتيب الأعداد تصاعدياً ثم ترتيب الحروف أبجدياً
<b>Join[list1, list2, ...]</b>	إضافة القوائم <b>list1, list2, ...</b> على بعضها بحيث تحتوى القائمة الناتجة على عدد من العناصر يساوى مجموع أعداد العناصر فى كل قائمة
<b>Union[list1, list2, ...]</b>	اتحاد الفئات $list1 \cup list2 \cup list3 \cup \dots$ حيث يتم حذف العناصر المكررة فى القوائم
<b>Intersection[list1, list2, ...]</b>	تقاطع الفئات $list1 \cap list2 \cap list3 \cap \dots$
<b>Complement[eall, e1, e2, ...]</b>	إيجاد مكملة الفئة <b>eall</b> بالنسبة للفئات <b>e1, e2, ...</b> ... أى إيجاد العناصر فى الفئة <b>eall</b> والغير موجودة فى الفئات <b>e1, e2, ...</b>
<b>Partition[list, n]</b>	تجزئ القائمة <b>list</b> الى قوائم فرعية متباعدة كل منها يحتوى على <b>n</b> من العناصر

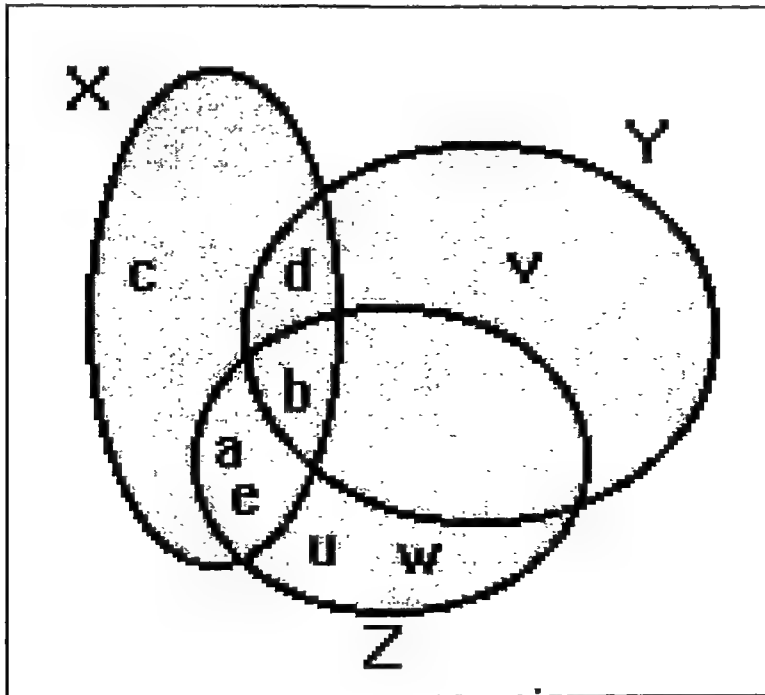
ولتوضيح أوامر الفئات نفرض القوائم  $X, Y, Z$

**In[13]:**  $X=\{a,b,c,d,e\}; Y=\{b,d,v\}; Z=\{a,b,e,u,w\};$

**In[14]:**  $\text{Length}[X]$

لمعرفة عدد العناصر في  $X$

**Out[14]:** 5



اضافة القوائم  $X, Y, Z$  معا بحيث تحتوى القائمة الناتجة على عدد

من العناصر يساوى مجموع أعداد العناصر في كل قائمة

**In[15]:**  $\text{Join}[X,Y,Z]$

**Out[15]:**  $\{a, b, c, d, e, b, d, v, a, b, e, u, w\}$

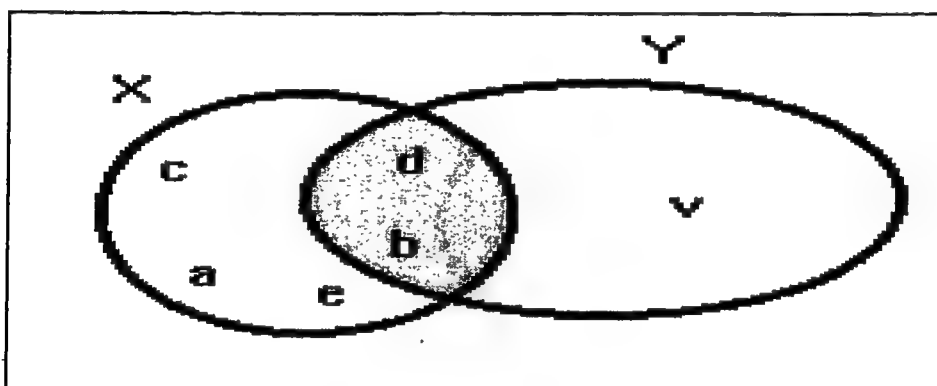
حيث يتم حذف العناصر المكررة في القوائم

$X \cup Y \cup Z$

اتحاد الفئات

**In[16]:**  $\text{Union}[X,Y,Z]$

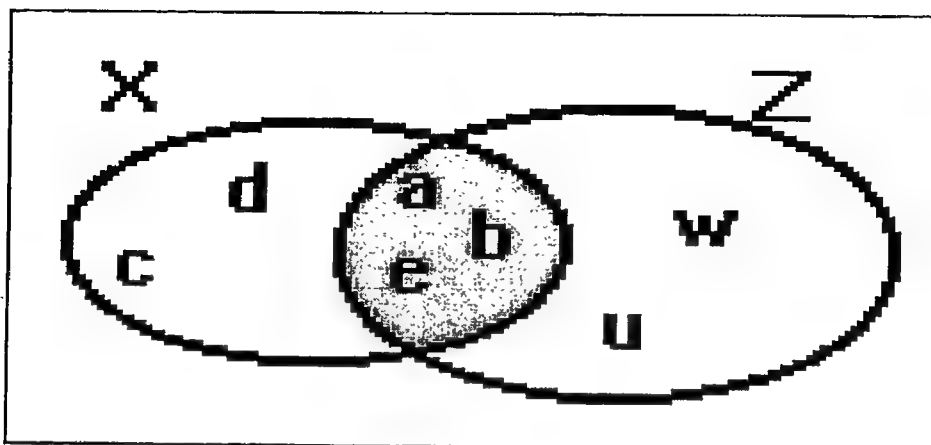
**Out[16]:**  $\{a, b, c, d, e, u, v, w\}$



تقاطع الفتان  $X \cap Y$  وتمثل فئة العناصر المشتركة في الفتان  $X, Y$

In[17]:=Intersection[X,Y]

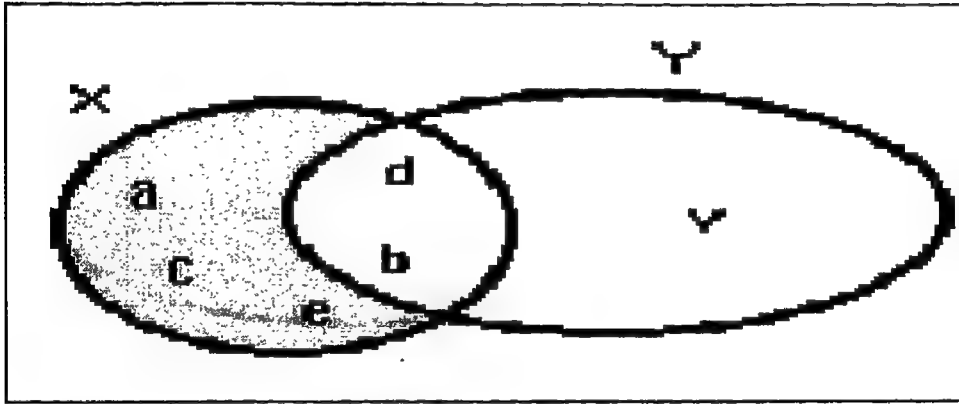
Out[17]={b, d}



تقاطع الفتان  $X \cap Z$  وتمثل فئة العناصر المشتركة في الفتان  $X, Z$

In[18]:=Intersection[X,Z]

Out[18]={a, b, e}



إيجاد مكملة الفئة X بالنسبة للفئة Y أي إيجاد العناصر في الفئة X والغير موجودة في الفئة Y

In[19]:=Complement[X,Y]

Out[19]={a, c, e}

In[20]:=Partition[Z,2]

Out[20]={{a, b}, {e, u}}

تجزئ الفئة Z الى قوائم فرعية كل

منها يحتوى على عنصرين

In[21]:=Partition[Y,1]

Out[21]={{b}, {d}, {v}}

تجزئ الفئة Y الى قوائم فرعية كل

منها يحتوى على عنصر واحد فقط

In[22]:=Sort[{r,4,9,p,e,a,-7}]

Out[22]={-7, 4, 9, a, e, p, r}

ترتيب عناصر القائمة حيث يتم أولا

ترتيب الأعداد تصاعديا ثم ترتيب

الحروف أبجديا

ويمكن إضافة عناصر جديدة الى القوائم باستخدام الأوامر الآتية :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
<b>Prepend[list, elem]</b>	إضافة العنصر <b>elem</b> في بداية القائمة <b>list</b>
<b>Append[list, elem]</b>	إضافة العنصر <b>elem</b> في نهاية القائمة <b>list</b>
<b>Insert[list, elem, n]</b>	إضافة العنصر <b>elem</b> الى القائمة <b>list</b> في الموضع رقم <b>n</b>

**In[23]:=rrr={a,b,c,d,e};**

تعريف القائمة **rrr**

**In[24]:=Prepend[rrr,x]**

إضافة العنصر **x** في بداية القائمة **rrr**

**Out[24]={x, a, b, c, d, e}**

**In[25]:=Append[rrr,y] ]**

إضافة العنصر **y** إلى نهاية القائمة **rrr**

**Out[25]={a, b, c, d, e, y}**

**In[26]:=Insert[rrr,z,2]**

إدخال العنصر **z** في الموضع رقم 2 من القائمة **rrr**

**Out[26]={a, z, b, c, d, e}**

ويمكن حذف عناصر من القوائم باستخدام الأمر Drop كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
<b>Drop[list, n]</b>	حذف n من العناصر من بداية القائمة list
<b>Drop[list, -n]</b>	حذف n من العناصر من نهاية القائمة list
<b>Drop[list,{n}]</b>	حذف العنصر رقم n من القائمة list
<b>Drop[list, {m, n}]</b>	حذف عناصر من القائمة list ابتداء من العنصر رقم m الى العنصر رقم n

حذف ثلاثة عناصر من بداية القائمة rl **In[27]:=r1={a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7};**

**Drop[r1,3]**

**Out[27]={a4, a5, a6, a7}**

حذف عنصران من نهاية القائمة rl **In[28]:=Drop[r1,-2]**

**Out[28]={a1, a2, a3, a4, a5}**

حذف العنصر الرابع من القائمة rl **In[29]:=Drop[r1,{4}]**

**Out[29]={a1, a2, a3, a5, a6, a7}**

حذف العناصر من العنصر الثالث الى **In[30]:=Drop[r1,{3,6}]**

العنصر السادس من القائمة rl **Out[30]={a1, a2, a7}**

ويمكن تحديد عناصر معينة من القائمة وذلك باستخدام الأقواس المزدوجة `[[ ]]`

`In[31]:=r1[[4]]` لتحديد العنصر الرابع من القائمة `r1`  
`Out[31]=a4`

`In[32]:=r1[[{4,6}]]` لتحديد العنصران الرابع والسادس من القائمة `r1`  
`Out[32]={a4, a6}`

وفي برنامج ماثيماتكا يمكن توليد قوائم بناء على مواصفات تحددها له وذلك باستخدام الأمر `Table` كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
<code>Table[expr, {imax}]</code>	عمل قائمة تحتوي على نسخ من <code>expr</code> عددها <code>imax</code>
<code>Table[expr, {i, imax}]</code>	عمل قائمة تحتوي على قيم <code>expr</code> ابتداء من <code>i=1</code> حتى <code>i=imax</code>
<code>Table[expr, {i, imin, imax}]</code>	عمل قائمة تحتوي على قيم <code>expr</code> ابتداء من <code>i=imin</code> حتى <code>i=imax</code>
<code>Table[expr, {i, imin, imax, di}]</code>	عمل قائمة تحتوي على قيم <code>expr</code> ابتداء من <code>i=imin</code> حتى <code>i=imax</code> بخطوة <code>di</code> مقدارها <code>di</code>
<code>Table[expr, {i, imin, imax}, {j, jmin, jmax}, ...]</code>	عمل جدول من القوائم يحتوي على قيم <code>expr</code> في أكثر من بعد <code>i, j, ...</code>
<code>TableForm[list]</code>	كتابة القائمة <code>list</code> في الشكل التقليدي للمصفوفة

ولتوضيح عمل الأمر *Table* نعطى الأمثلة الآتية :

In[33]:=Table[x,{4]      لتوليد قائمة تحتوي على أربعة نسخ من الرمز x

Out[33]= {x, x, x, x}

In[34]:=Table[Random[],5]      لتوليد قائمة تحتوي على خمسة أعداد

Out[34]=      عشوائية في الفترة [0,1]

{0.803812, 0.152706, 0.0624843, 0.59723, 0.192153}

In[35]:=Table[i^2,{i,7}]      لتوليد قائمة تحتوي على قيم  $i^2$  من

Out[35]= {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49}       $i=1$  الى  $i=7$

In[36]:=Table[x^i + 2i x,{i,3,6}]      لتوليد قائمة تحتوي على المقدار الجبري

Out[36]=       $x^i + 2i x$  من  $i=3$  الى  $i=6$

{6 x + x<sup>3</sup>, 8 x + x<sup>4</sup>, 10 x + x<sup>5</sup>, 12 x + x<sup>6</sup>}

In[37]:=Table[i^3,{i,2,8,2}]      لتوليد قائمة عناصرها هي مكعبات الأعداد

Out[37]= {8, 64, 216, 512}      الزوجية المحصورة بين 2, 8

In[38]:=m=Table[i^2+2j,{i,3},{j,2,5}]      لتوليد قائمة m تحتوي على قيم  $i^2 + 2j$

Out[38]:=      حيث  $i=1,2,3$  &  $j=2,3,4,5$

{{5, 7, 9, 11}, {8, 10, 12, 14}, {13, 15, 17, 19}}

In[39]:= TableForm[m]      ولعرض القائمة m في صورة جدول

Out[39]=

5	7	9	11
8	10	12	14
13	15	17	19

## ثانيا : المصفوفات Matrices

المصفوفات والعمليات الخاصة بها تستخدم بشكل كبير فى الرياضيات ويمكن الاستفادة من ماثياتيكا فى إجراء العمليات الرياضية الخاصة بالمصفوفات والتي كانت تستغرق الكثير من الوقت خاصة إذا كانت المصفوفات من أبعاد كبيرة . والمصفوفات فى ماثياتيكا عبارة عن قوائم من قوائم lists of lists فمثلا

- القائمة {a,b,c} تمثل المتجه (a,b,c) وهى مصفوفة من صف واحد وثلاثة اعمدة
- والقائمة {{a,b},{c,d}} تمثل المصفوفة  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  وهى مصفوفة من صفين وعمودين
- والقائمة {{a<sub>1</sub>,a<sub>2</sub>,a<sub>3</sub>},{b<sub>1</sub>,b<sub>2</sub>,b<sub>3</sub>}} تمثل المصفوفة  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$  وهى مصفوفة من صفين وثلاثة اعمدة وهكذا ،

وبالتالى فانه يمكن إدخال عناصر المصفوفة بصورة القوائم ، ويحتوى ماثياتيكا على الأوامر Table , Array والخاصة بتكوين مصفوفات ذات أبعاد مختلفة والأمر Table هو الأكثر استخداما .

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Table[f,{i,m},{j,n}]	تكوين مصفوفة من البعد mxn حيث m تمثل عدد الصفوف ، n تمثل عدد الأعمدة ، f تمثل دالة فى i,j لتوليد عناصر المصفوفة
Array[f, n]	تكوين مصفوفة على شكل صف به n من العناصر على الصورة f[i]
Array[f, {m,n}]	تكوين مصفوفة من البعد mxn على الصورة {f[i,j]} حيث f[i,j] يمثل العنصر فى الصف i والعمود j
MatrixForm[list]	طباعة القائمة list فى الشكل التقليدى للمصفوفة

وفي ماتيماتيكا يمكن اجراء العمليات الحسابية من جمع وطرح وضرب على المصفوفات ولتوضيح ذلك

In[1]:= Array[h,6]      تكوين مصفوفة على شكل صف به 6 عناصر  
Out[1]={h[1], h[2], h[3], h[4], h[5], h[6]}

In[2]:=Array[a,{2,2}]      تكوين مصفوفة 2x2 عناصرها على صورة  $a_{ij}$   
Out[2]={{a[1, 1], a[1, 2]}, {a[2, 1], a[2, 2]}}

تكوين مصفوفة 3x3 عناصرها على الصورة  $f_{ij} = 10i + j$  ثم عرض الناتج  
في الشكل التقليدي للمصفوفة

In[3]:=f=Table[10i+j,{i,3},{j,3}]  
;MatrixForm[f]

Out[3]= 
$$\begin{matrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{matrix}$$

تكوين مصفوفة 3x3 عناصرها على صورة  $m_{ij}$

In[4]:=g=Array[m,{3,3}]

Out[4]={{m[1, 1], m[1, 2], m[1, 3]},  
          {m[2, 1], m[2, 2], m[2, 3]},  
          {m[3, 1], m[3, 2], m[3, 3]}}

حساب مجموع المصفوفتان  $f$  ,  $g$  ثم عرض الناتج في الشكل التقليدي للمصفوفة

**In[5]:=MatrixForm[f+g]**

**Out[5]=** 
$$\begin{matrix} 11 + m[1, 1] & 12 + m[1, 2] & 13 + m[1, 3] \\ 21 + m[2, 1] & 22 + m[2, 2] & 23 + m[2, 3] \\ 31 + m[3, 1] & 32 + m[3, 2] & 33 + m[3, 3] \end{matrix}$$

حساب حاصل طرح المصفوفتان  $f$  ,  $g$  ثم عرض الناتج في الشكل التقليدي للمصفوفة

**In[6]:=MatrixForm[f-g]**

**Out[6]=** 
$$\begin{matrix} 11 - m[1, 1] & 12 - m[1, 2] & 13 - m[1, 3] \\ 21 - m[2, 1] & 22 - m[2, 2] & 23 - m[2, 3] \\ 31 - m[3, 1] & 32 - m[3, 2] & 33 - m[3, 3] \end{matrix}$$

حساب حاصل ضرب المصفوفة  $g$  في العدد 5

**In[7]:=5g**

**Out[7]=** 
$$\begin{matrix} \{ 5 m[1, 1] , 5 m[1, 2] , 5 m[1, 3] \} , \\ \{ 5 m[2, 1] , 5 m[2, 2] , 5 m[2, 3] \} , \\ \{ 5 m[3, 1] , 5 m[3, 2] , 5 m[3, 3] \} \end{matrix}$$

حساب خارج قسمة المصفوفة g على 3

In[8]:= g/3

Out[8]=

$$\left\{\left\{\frac{m(1,1)}{3}, \frac{m(1,2)}{3}, \frac{m(1,3)}{3}\right\}, \left\{\frac{m(2,1)}{3}, \frac{m(2,2)}{3}, \frac{m(2,3)}{3}\right\}, \left\{\frac{m(3,1)}{3}, \frac{m(3,2)}{3}, \frac{m(3,3)}{3}\right\}\right\}$$

حساب حاصل ضرب المصفوفتان f , g

In[9]:= f . g

$$\begin{aligned} \text{Out[9]} = & \{ \{ 11 m[1, 1] + 12 m[2, 1] + 13 m[3, 1], \\ & 11 m[1, 2] + 12 m[2, 2] + 13 m[3, 2], \\ & 11 m[1, 3] + 12 m[2, 3] + 13 m[3, 3] \}, \\ & \{ 21 m[1, 1] + 22 m[2, 1] + 23 m[3, 1], \\ & 21 m[1, 2] + 22 m[2, 2] + 23 m[3, 2], \\ & 21 m[1, 3] + 22 m[2, 3] + 23 m[3, 3] \}, \\ & \{ 31 m[1, 1] + 32 m[2, 1] + 33 m[3, 1], \\ & 31 m[1, 2] + 32 m[2, 2] + 33 m[3, 2], \\ & 31 m[1, 3] + 32 m[2, 3] + 33 m[3, 3] \} \} \end{aligned}$$

تعريف المصفوفة f1 من رتبة 3x2 وتعريف المصفوفة f2 من رتبة 2x4 ثم حساب حاصل ضرب المصفوفتان f1 , f2 وعرض الناتج في الشكل التقليدي للمصفوفة

In[10]:= f1={{2,-1},{1,0},{-3,4}};f2={{1,-2,3,0},{3,4,0,1}};  
MatrixForm[f1.f2]

$$\text{Out[10]} = \begin{array}{cccc} -1 & -8 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 9 & 22 & -9 & 4 \end{array}$$

وفي ماتيماتكا يمكن إجراء العمليات الأساسية على المصفوفات كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
<b>Transpose[m]</b>	حساب مدور المصفوفة $m$
<b>Det[m]</b>	حساب قيمة محدد المصفوفة $m$
<b>Minors[m, k]</b>	حساب مصفوفة المحددات المصاحبة من رتبة $k \times k$ من المصفوفة $m$
<b>Inverse[m]</b>	حساب معكوس المصفوفة المربعة $m$
<b>MatrixPower[m,k]</b>	حساب $m^k$

**In[11]:=g1=Transpose[g];MatrixForm[g1]** حساب مدور المصفوفة  $g$  ثم

**Out[11]=**  $\begin{matrix} m[1, 1] & m[2, 1] & m[3, 1] \\ m[1, 2] & m[2, 2] & m[3, 2] \\ m[1, 3] & m[2, 3] & m[3, 3] \end{matrix}$  عرض الناتج في الشكل التقليدي للمصفوفة

**In[12]:=g2={{2,4},{1,7}};Det[g2]** تعريف المصفوفة  $g2$  من رتبة  $2 \times 2$

**Out[12]=10** ثم حساب قيمة المحدد

In[13]:=Inverse[g2]

حساب معكوس المصفوفة g2

Out[13]= $\left\{\left\{\frac{7}{10}, -\left(\frac{2}{5}\right)\right\}, \left\{-\left(\frac{1}{10}\right), \frac{1}{5}\right\}\right\}$

In[14]:=MatrixPower[g2,3]

لحساب  $(g2)^3$

Out[14]= $\{\{52, 284\}, \{71, 407\}\}$

تعريف المصفوفة g3 من رتبة 3x3 ثم حساب مصفوفة المحددات المصاحبة  
من رتبة 2x2 من المصفوفة g3

In[15]:=g3={{1,5,7},{2,4,3},{-1,6,0}}; Minors[g3,2]

Out[15]= $\{\{-6, -11, -13\}, \{11, 7, -42\}, \{16, 3, -18\}\}$

In[16]:=d=Det[g3] }

حساب قيمة المحدد للمصفوفة g3

Out[16]=279

In[17]:=Inverse[g3]

حساب معكوس المصفوفة g3

Out[17]=

$\left\{\left\{-\left(\frac{18}{79}\right), \frac{42}{79}, -\left(\frac{13}{79}\right)\right\}, \left\{-\left(\frac{3}{79}\right), \frac{7}{79}, \frac{11}{79}\right\}, \left\{\frac{16}{79}, -\left(\frac{11}{79}\right), -\left(\frac{6}{79}\right)\right\}\right\}$

$f[i]$	لتحديد الصف رقم $i$ في المصفوفة $f$
$f[[i,j]]$	لتحديد العنصر $f_{ij}$ بالصف رقم $i$ والعمود رقم $j$ في المصفوفة $f$
$\text{Sum}[f[[i,i]],\{i,n\}]$	لحساب مجموع عناصر القطر الرئيسى في المصفوفة المربعة $f$ من رتبة $n \times n$
$\text{Transpose}[f][[j]]$	لتحديد العمود رقم $j$ في المصفوفة $f$

In[18]:=g[[2]]  
 Out[18]={m[2, 1], m[2, 2], m[2, 3]}

تحديد الصف الثانى من المصفوفة g

In[19]:=g[[3,1]]  
 Out[19]=m[3, 1]

لتحديد العنصر الموجود في الصف

الثالث والعمود الأول في المصفوفة g

In[20]:=Sum[g[[i,i]],{i,3}]  
 Out[20]=m[1, 1] + m[2, 2] + m[3, 3]

لحساب مجموع عناصر القطر الرئيسى

في المصفوفة g

In[21]:=Transpose[g][[3]]

لتحديد العمود الثالث من المصفوفة g

Out[21]={m[1, 3], m[2, 3], m[3, 3]}

ويستطيع برنامج ماتيماتيكا تكوين مصفوفات من اشكال مختلفة كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
DiagonalMatrix[list]	تكوين مصفوفة قطرية بحيث أن عناصر القائمة list توضع في قطر المصفوفة وباقي العناصر أصفار
IdentityMatrix[n]	تكوين مصفوفة الوحدة من البعد $n \times n$
Table[0,{m},{n}]	تكوين مصفوفة صفرية من البعد $m \times n$
Table[If[i<=j,1,0],{i,m},{j,n}]	تكوين مصفوفة مثلثية عليا Upper Triangular عناصرها في أعلى القطر 1 وخلاف ذلك أصفار

In[22]:=DiagonalMatrix[{a,b,c}]

تكوين مصفوفة قطرية من القائمة {a,b,c}

Out[22]={{a, 0, 0}, {0, b, 0}, {0, 0, c}}

In[23]:=IdentityMatrix[3]

تكوين مصفوفة الوحدة من البعد  $3 \times 3$

Out[23]={{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}

In[24]:=Table[0,{i,3},{j,2}]      تكوين مصفوفة صفرية من البعد 3x2  
Out[24]={{0,0},{0,0},{0,0}}

In[25]:=Table[If[i<=j,1,0],{i,3},{j,3}]      تكوين مصفوفة مثلثية عليا من البعد 3x3  
Out[25]={{1, 1, 1}, {0, 1, 1}, {0, 0, 1}}

In[26]:=Table[If[i>=j,1,0],{i,4},{j,4}]      تكوين مصفوفة مثلثية سفلى من البعد 4x4  
Out[26]=  
{{1, 0, 0, 0}, {1, 1, 0, 0}, {1, 1, 1, 0}, {1, 1, 1, 1}}

In[27]:=MatrixForm[%26]      لعرض المصفوفة الناتجة من جملة الإدخال  
Out[27]=  
1   0   0   0  
1   1   0   0  
1   1   1   0  
1   1   1   1  
In[26] فى الشكل التقليدى للمصفوفة

## ثالثا : حل الأنظمة الخطية Solving Linear Systems

نظرية المعادلات الخطية linear equations تلعب دورا هاما في الجبر الخطي , وفي الحقيقة فإن دراسة مسائل عديدة في الجبر الخطي يتم تحويلها الى دراسة نظام من المعادلات الخطية . والمعادلة الخطية هي معادلة لها الصورة  $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$  حيث  $x_i$  تمثل متغيرات ,  $a_i$  أعداد حقيقية وتمثل معاملات المتغيرات ,  $b$  عدد حقيقي ويمثل الحد الثابت .

وكثيرا ما نحتاج الى إيجاد حلول أنظمة من المعادلات الخطية , وفي بعض الحالات يكون من الأفضل كتابة المعادلات ثم حلها باستخدام الأمر Solve وفي حالات أخرى يكون من المفضل تحويل نظام المعادلات الخطية الى شكل مصفوفات  $m \cdot x = b$  حيث  $x$  يمثل متجه المتغيرات ,  $m$  يمثل مصفوفة المعاملات ,  $b$  يمثل متجه الثوابت .

حل المعادلتين باستخدام الأمر Solve مباشرة `In[1]:=Solve[{x+5y==1,2x+y==3},{x,y}]`

`Out[1]={{x->14/9,y->-1/9}}`

`In[2]:=mat1={{2,1,-2},{3,2,2},{5,4,3}}`

تعريف المصفوفة mat1 من رتبة 3x3

`Out[2]={{2, 1, -2}, {3, 2, 2}, {5, 4, 3}}`

`In[3]:=mat1.{x,y,z}=={10,1,4}`

تكوين نظام من ثلاث معادلات

`Out[3]={2 x + y - 2 z, 3 x + 2 y + 2 z,  
5 x + 4 y + 3 z} == {10, 1, 4}`

`In[4]:=Solve[%,{x,y,z}]`

حل نظام المعادلات باستخدام الأمر

`Out[4]={{x -> 1, y -> 2, z -> -3}}`

Solve مباشرة

`In[5]:= {x,y,z}=Inverse[mat1].{10,1,4}` حل نظام المعادلات باستخدام معكوس المصفوفة

`Out[5]={1, 2, -3}`

وبرنامج ماثيماتكا قادر على حل نظام المعادلات الخطية في صورة مصفوفة باستخدام الأمر **LinearSolve** كالآتي :

<b>LinearSolve[m, b]</b>	لايجاد متجه المتغيرات $x$ الذى يحقق نظام المعادلات الخطية $m \cdot x = b$
--------------------------	--

وعند التعامل مع مصفوفات من ابعاد كبيرة يكون من الافضل استخدام الأمر **LinearSolve** لحل نظام المعادلات .

حل نظام المعادلات الخطية

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 10 \\ 3x + 2y + 2z &= 1 \\ 5x + 4y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

فى صورة مصفوفة باستخدام الأمر **LinearSolve** يكون كالآتي:

```
In[6]:=LinearSolve[mat1,{10,1,4}]
Out[6]={1, 2, -3}
```

حيث **mat1** هى مصفوفة المعاملات  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$  فى نظام المعادلات المعرف فى جملة الإدخال **In[3]** والحل يكون

$$x = 1, y = 2, z = -3$$

حل نظام المعادلات الخطية

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

في صورة مصفوفة باستخدام الأمر **LinearSolve** يكون كالآتي :

**In[7]:=mat2={{1,2,-3},{2,-1,4},{4,3,-2}};**

**LinearSolve[mat2,{6,2,14}]**

**Out[7]={2, 2, 0}**

$$x = 2, y = 2, z = 0$$

والحل يكون

حل نظام المعادلات الخطية

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

في صورة مصفوفة باستخدام الأمر **LinearSolve** يكون كالآتي :

**In[8]:=mat3={{1,-3,4,-2},{0,2,5,1},{0,1,-3,0}};**

**LinearSolve[mat3,{5,2,4}]**

**Out[8]={ $\frac{157}{11}, \frac{26}{11}, -(\frac{6}{11}), 0$ }**

ونلاحظ أن نظام المعادلات يتكون من ثلاثة معادلات في أربعة مجاهيل وله عدد لا نهائي من الحلول لأنه تم حساب ثلاث مجاهيل بدلالة المجهول الرابع وناتج الحل يمثل حل نظام المعادلات بعد اخذ قيمة عددية للمجهول الرابع .

وإذا كان  $m$  مصفوفة مربعة فإننا نعلم من دراستنا في الجبر الخطي أن نظام المعادلات

$$m \cdot x = b$$

يكون له حل وحيد لأي متجه ثابت  $b$  إذا كان محدد المصفوفة  $m$  لا يساوى صفر بينما إذا كان محدد المصفوفة  $m$  يساوى صفر فهذا يعني أنه لا يوجد حل  $x$  يحقق نظام المعادلات  $m \cdot x = b$ .  $m \cdot x = b$  لقيمة خاصة للمتجه  $b$  وبمعنى آخر أن المعادلات تعتمد على بعضها **dependent** وفي هذه الحالة فإن مجموعة المتجهات  $x$  التي تحقق  $m \cdot x = 0$  تسمى الفراغ الصفري **nullspace** للمصفوفة  $m$  أو **kernel**  $m$  وماتيماتكا قادر على حساب متجهات الأساس **Basis** للفراغ الصفري لمصفوفة وذلك باستخدام الأمر **NullSpace** كالاتي :

### NullSpace[m]

لإيجاد متجهات أساس **basis vectors** جميع تركيباتها الخطية **linear combinations** تحقق المعادلة  $m \cdot x = 0$  حيث  $0$  هو المتجه الصفري

**In[9]:=mat4={{1,2,1},{2,4,2},{3,6,3}}** محدد المصفوفة **mat4** يساوى صفر

**;Det[mat4]**

**Out[9]=0**

**In[10]:=LinearSolve[mat4,{a,b,c}]** الدالة **LinearSolve** لا تستطيع إيجاد

**Out[10]=LinearSolve::nosol:** حل نظام المعادلات

**Linear equation encountered which has no solution.**

**LinearSolve[{{1, 2, 1}, {2, 4, 2}, {3, 6, 3}}, {a, b, c}]**

**In[11]:=NullSpace[mat4]** أساس الفراغ الصفري للمصفوفة **mat4**

**Out[11]={{-1, 0, 1}, {-2, 1, 0}}** يحتوي على متجهان

ومن المميزات الهامة للأمر **LinearSolve** والأمر **NullSpace** هو التعامل مع مصفوفات من أي رتبة .

### رابعاً : القيم المميزة والمتجهات المميزة Eigenvalues and Eigenvectors

القيم المميزة لمصفوفة  $m$  هي قيم  $\lambda$  التي تحقق المعادلة  $m \cdot \lambda \cdot x = x$  حيث  $x$  متجه غير صفري وفي هذه الحالة فإن المتجهات  $x$  التي تحقق هذه المعادلة تسمى المتجهات المميزة للمصفوفة  $m$  والتي تناظر القيمة المميزة  $\lambda$  ويمكن الحصول على القيم المميزة من حل كثيرة الحدود المميزة Characteristic polynomial وتعطى بالمعادلة

$$|m - \lambda J| = 0$$

حيث  $J$  مصفوفة الوحدة ، وبرنامج ماتيماتكا قادر على حساب القيم المميزة والمتجهات المميزة لأي مصفوفة كالاتي :

الوظيفة التي يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر
تكوين قائمة تحتوي على جميع القيم المميزة للمصفوفة $m$	Eigenvalues[m]
تكوين قائمة تحتوي على جميع المتجهات المميزة للمصفوفة $m$	Eigenvectors[m]
تكوين قائمة تحتوي على جميع القيم المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة $m$ وتكون بالصورة { eigenvalue,eigenvector }	Eigensystem[m]
تكوين قائمة تحتوي على قيم عددية تقريبية للقيم المميزة للمصفوفة $m$	Eigenvalues[N[m]]

In[1]:=m={{1,2},{3,2}}

تعريف المصفوفة  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Out[1]= {{1, 2}, {3, 2}}

In[2]:=Eigenvalues[m]

Out[2]= Eigenvalues::eival:

Unable to find all roots of the characteristic polynomial.

Eigenvalues[{{1, 2}, {3, 2}}]

نلاحظ أن ماتيماتكا لا يتمكن من حساب القيم المميزة للمصفوفة  $m$  لأن عناصر المصفوفة أعداد صحيحة ويمكن التغلب على هذه المشكلة عن طريق كتابة الأعداد الموجودة في المصفوفة بالصورة العشرية (فمثلا يكتب 3 بدلا من 3) كما يمكن عمل ذلك باستخدام الدالة  $N$

In[3]:=Eigenvalues[N[m]]

القيم المميزة للمصفوفة  $m$

Out[3]= {4., -1.}

In[4]:=Eigenvectors[N[m]]

المتجهات المميزة للمصفوفة  $m$

Out[4]= {{-0.5547, -0.83205}, {-0.707107, 0.707107}}

In[5]:={values,vectors}=Eigensystem[N[m]] تكوين قائمة تحتوى على جميع القيم

Out[5]= {{4., -1.}, {{-0.5547, -0.83205}, {-0.707107, 0.707107}}} المميزة و المتجهات المميزة للمصفوفة  $m$

للتحقق من أن القيمة المميزة الأولى  $k_1$  والمتجه المميز  $x$  يحقق المعادلة  $m \cdot x = k_1 x$

**In[6]:=m.vectors[[1]]==values[[1]] vectors[[1]]**

**Out[6]= True**

لإيجاد المعادلة المميزة للمصفوفة  $m$

**In[7]:=po=Det[m-k IdentityMatrix[Dimensions[m][[1]]]]**

**Out[7]= -4 - 3 k + k<sup>2</sup>**

حل المعادلة المميزة والحصول على القيم المميزة للمصفوفة  $m$

**In[8]:=Solve[po==0,k]**

**Out[8]= {{k -> -1}, {k -> 4}}**

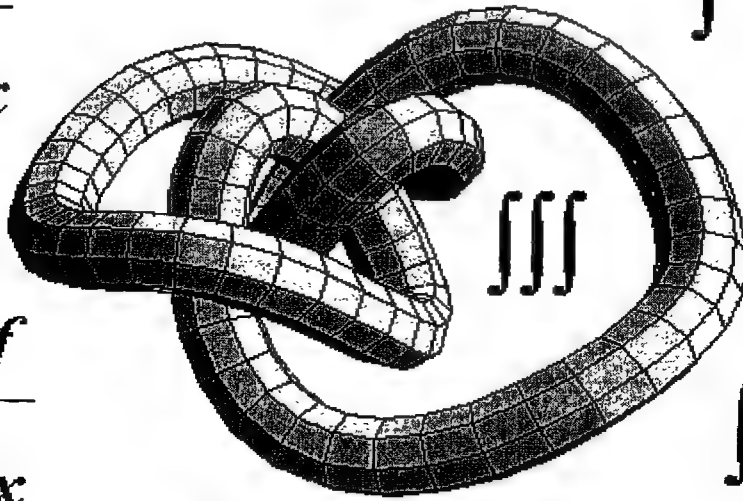
## الباب الرابع ماثيماتيك والتفاضل والتكامل

$df$

$dx$

$\partial f$

$\partial x$



فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيك  
والخاصة بالموضوعات الآتية :

Defining Functions

Limits

Differentiation

Integration

Differential Equations

١. تعريف الدوال

٢. النهايات

٣. التفاضل

٤. التكامل

٥. المعادلات التفاضلية



## الباب الرابع

### ماثيماتيك والتفاضل والتكامل

نعلم أن برنامج ماثيماتيك يستطيع التعامل مع التعبيرات الرمزية **Symbolic expressions** بنفس المقدرة على التعامل مع الأعداد و لذلك يمكن استخدام ماثيماتيك في حساب النهايات **Limits** وحساب التفاضل والتكامل **Calculus** للدوال المختلفة والحصول على النتائج في صورة رمزية سواء كانت هذه الدوال من الدوال الأساسية الموجودة داخل بناء ماثيماتيك **built-in** أو دوال نقوم بتعريفها ، وكذلك يمكن استخدام ماثيماتيك في حل المعادلات التفاضلية .

#### ١ . تعريف الدوال Defining Functions

إلى جانب العديد من الدوال الموجودة داخل بناء ماثيماتيك فإنه يمكن للمستخدم إضافة أي دوال جديدة يحتاج إليها وبأسماء يقترحها بنفسه وسوف نستخدم الحروف الصغيرة **lower case - letters** في كتابة أسماء هذه الدوال الجديدة حتى لا يحدث تداخل بين أسماء الدوال الموجودة في بناء ماثيماتيك وبين أسماء الدوال الجديدة التي يقوم المستخدم بتعريفها وفقا لقواعد معينة . فمثلا تعريف الدالة  $f(x)=x^2$  في ماثيماتيك يكتب في الصورة  $f[x]=x^2$  والعلامة \_ الموجودة في الطرف الأيسر بجانب المتغير  $x$  تسمى الفراغ الخالي **blank space** وهي هامة في تعريف الدالة حيث النمط **pattern**  $x\_$  يرمز الى أي تعبير أو متغير وبذلك فإن تعريف الدالة بهذه الصورة يصف قاعدة تحويل **Transformation Rule** لجميع التعبيرات التي على الصورة  $f[anything]$  حيث **anything** يشير الى المتغير  $x$  أو أي متغير آخر

وعندما يظهر تعبير على الصورة  $f[\text{anything}]$  فإنه يستبدل بالقيمة  $\text{anything}^2$  والتي تمثل ناتج تعريف الدالة  $f$ .

تعريف الدالة  $f(x)=x^2$   
 $\text{In}[1]:=f[x_]=x^2$   
 $\text{Out}[1]=x^2$

عند حساب قيمة الدالة  $f(x)$  عند  $x=3$   
 $\text{In}[2]:=f[3]$   
 $\text{Out}[2]=9$   
 فإن الناتج يكون  $3^2$  ويساوي 9

حساب قيمة الدالة  $f(x)$  عند  $x=a+1$   
 $\text{In}[3]:=f[a+1]$   
 $\text{Out}[3]=(a+1)^2$

عند حساب قيمة  $f(x) + f(y)$   
 $\text{In}[4]:=f[x]+f[y]$   
 $\text{Out}[4]=x^2 + y^2$

وفي حالة عدم كتابة العلامة \_ بالطرف الأيسر في تعريف الدالة فإن  $f[x]$  سوف تمثل تعبير خاص وليس قاعدة تحويل فمثلا إذا أدخلنا في ماثميكا التعريف  $g[x]=x^3$  فإنه عند ظهور التعبير  $g[x]$  يتم استبداله بالقيمة  $x^3$  لكن التعريف لا يعطينا أي معلومات إذا استبدلنا المتغير  $x$  بقيمة عددية أو بمتغير آخر فمثلا  $g[3]$  ليس لها قيمة ناتجة من التعريف وبالمثل  $g[a]$  ليس لها قيمة ناتجة من التعريف وهذا حدث نتيجة لعدم استخدام النمط \_ في تعريف الدالة  $g$ .

تعريف  $g(x)=x^3$  بدون استخدام النمط \_  
 $\text{In}[5]:=g[x]=x^3$   
 $\text{Out}[5]=x^3$

عند حساب قيمة  $g(x)$  عند  $x=3$  فإن الناتج  
 $\text{In}[6]:=g[3]$   
 $\text{Out}[6]=g[3]$   
 يكون  $g[3]$  أي أن  $g(x)$  لا تمثل قاعدة تحويل

لحساب قيمة  $g(x)$  عند  $x = a$  فإن الناتج  
 $\text{In}[7]:=g[a]$   
 يكون  $g[a]$  أي أن  $g(x)$  لا تمثل قاعدة تحويل  
 $\text{Out}[7]= g[a]$

عند حساب قيمة  $g(x) + g(y)$  نلاحظ أن الناتج  
 $\text{In}[8]:=g[x]+g[y]$   
 $x^3 + g[y]$  لأن  $g(x)=x^3$  بينما  $g(y)$  ليست معلومة  
 $\text{Out}[8]=x^3 + g[y]$

ونتيجة لذلك يجب مراعاة الآتي عند تعريف الدوال في ماثميكا :

$f[x] = \text{value}$	تمثل تعريف لتعبير خاص وليس قاعدة تحويل
$f[x_] = \text{value}$	تمثل تعريف دالة وهي قاعدة تحويل لأي متغير $x$

وفي ماثميكا يمكن الاستعلام عن تعريف الدوال أو حذف التعريف من الذاكرة كالاتي :

$?f$	للاستعلام عن تعريف الدالة $f$
$\text{Clear}[f]$	لحذف تعريف الدالة $f$ من الذاكرة

للاستعلام عن تعريف الدالة  $f$  التي سبق  
 $\text{In}[9]:=?f$   
 إدخالها في جملة الإدخال  $\text{In}[1]$   
 $\text{Out}[9]= \text{Global`f}$   
 $f[x_] = x^2$

لحذف تعريف الدالة  $f$  من الذاكرة  
 $\text{In}[10]:= \text{Clear}[f]$

والآن عند الاستعلام عن تعريف الدالة  $f$   
 $\text{In}[11]:=?f$   
 نلاحظ أن التعريف قد حذف من الذاكرة  
 $\text{Out}[11]= \text{Global`f}$

وفي برنامج ماثميكا يمكن تعريف دوال في أكثر من متغير ويتم ذلك بتحديد أسم للدالة واستخدام النمط \_ لكل متغير في الدالة .

تعريف الدالة r1 في متغيرين  
`In[12]:=r1[x_,y_]=x^2+x y+y^2`  
`Out[12]=x2 + x y + y2`

لحساب قيمة الدالة r1(x,y)  
`In[13]:=r1[2,3]`  
`Out[13]=19`  
 عند x=2 , y=3

تعريف الدالة r2 في أربعة متغيرات  
`In[14]:=r2[x_,y_,z_,t_]=(x-z)^2+(y-t)^2`  
`Out[14]=(x-z)2 + (y-t)2`

وفي برنامج ماثميكا عند تعريف دالة كجمللة إحلال `hs = rhs` فإنه يوجد مؤثرين للإحلال `assignment operators`  
 المؤثر الأول هو علامة التساوى =  
 والمؤثر الثانى هو علامة :=

والفرق الأساسى بين المؤثرين يكون وفقا لطريقة حساب الطرف الأيمن rhs لجمللة الإحلال كالاتي :

المؤثر = يستخدم في كتابة جملة الإحلال بالصورة `lhs = rhs` إذا كان الطرف الأيمن rhs يتم حسابه مباشرة ليمثل القيمة النهائية للطرف الأيسر lhs  
 المؤثر := يستخدم في كتابة جملة الإحلال بالصورة `lhs := rhs` إذا كان الطرف الأيمن rhs يتم حسابه كل مرة يطلب فيها حساب قيمة الطرف الأيسر lhs بمعنى إذا كان الطرف الأيمن rhs يمثل أمر أو برنامج يتم تنفيذه عند السؤال عن الطرف الأيسر lhs

والأمثلة الآتية توضح الفرق بين المؤثر = والمؤثر :=

عند استخدام المؤثر = فى تعريف الدالة  $r3(x)$  التى تقوم بحساب مفكوك  $(1+x)^2$  فإن المفكوك بالطرف الأيمن يتم حسابه مباشرة

```
In[15]:=r3[x_]=Expand[(1+x)^2]
Out[15]= 1+2x+x^2
```

والآن عند الاستعلام عن تعريف الدالة  $r3(x)$  نلاحظ أن التعريف يحتوى على الطرف الأيمن بعد تنفيذه فى صورة مفكوك

```
In[16]:=?r3
Out[16]=Global`r3
r3[x_]= 1 + 2*x + x^2
```

ولحساب قيمة الدالة  $r3(x)$  عند  $x = a + b$  يتم التعويض عن  $a + b$  فى المفكوك الموجود بالفعل وهو  $1 + 2x + x^2$

```
In[17]:=r3[a+b]
Out[17]=1 + 2 (a + b) + (a + b)^2
```

عند استخدام المؤثر := فى تعريف الدالة  $r4(x)$  التى تقوم بحساب مفكوك  $(1+x)^2$  فإن المفكوك بالطرف الأيمن يعاد حسابه فى كل مرة يطلب فيها حساب قيمة الدالة  $r4(x)$

```
In[18]:=r4[x_]:=Expand[(1+x)^2]
```

والآن عند الاستعلام عن تعريف الدالة  $r4(x)$  نلاحظ أن التعريف هو نفسه الطرف الأيمن ويحتوى على أمر المفكوك **Expand** جاهز للتنفيذ

```
In[19]:=?r4
Out[19]=Global`r4
r4[x_]:= Expand[(1 + x)^2]
```

ولحساب قيمة الدالة  $r4(x)$  عند  $x = a + b$  يتم التعويض عن  $a + b$  فى أمر المفكوك  $Expand[(1+a+b)^2]$  ثم يتم تنفيذه

```
In[20]:=r4[a+b]
Out[20]=1 + 2 a + a^2 + 2 b + 2 a b + b^2
```

وكمثال آخر نفرض أننا نريد تصميم دالة لحساب  
مضروب أي عدد صحيح Factorial function من القاعدة

$$n! = n (n-1) (n-2) \dots 3 \times 2 \times 1$$

تعريف دالة المضروب تحت اسم fa `In[21]:=fa[1]=1;fa[n_]:=n fa[n-1]`

نلاحظ انه في جملة الإحلال الأولى `fa[1]=1` استخدمنا المؤثر `=` لأن الطرف الأيمن قيمته  
محسوبة بينما في جملة الإحلال الثانية `fa[n]:=n fa[n-1]` استخدمنا المؤثر `:=` لأن  
الطرف الأيمن يتم حسابه كل مرة تنفيذ والقيمة المحسوبة بالطرف الأيسر lhs يتم استخدامها  
في حساب الطرف الأيمن rhs في كل مرة لذلك فإن المؤثر `:=` ضروري في تعريف هذه  
الدالة .

`In[22]:=fa[4]`

لحساب 4!

`Out[22]=24`

`In[23]:=fa[6]`

لحساب 6!

`Out[23]=720`

`In[24]:=?fa`

للاستعلام عن الدالة fa

`Out[24]=Global`fa`

`fa[1] = 1`

`fa[n_] := n*fa[n - 1]`

In[25]:=Clear[fa]

حذف تعريف الدالة fa من ذاكرة ماتيماتيكاً

In[26]:=fa

للاستعلام عن الدالة fa بعد حذفها ونلاحظ

Out[26]=Global`fa

اختفاء التعريف

وماتيماتيكاً عند تنفيذه هذه الدالة لحساب fa[6] يستخدم التعريف المعطى للدالة بالصورة  $fa[6]=6\ fa[5]$  وبعد ذلك يتم تطبيق التعريف مرة أخرى لحساب fa[5] من العلاقة  $fa[5]=5\ fa[4]$  وبالمثل يتم تطبيق التعريف مرة أخرى لحساب fa[4] وهكذا حتى يصل الى fa[1] وقيمتها معطاة ونلاحظ أن ماتيماتيكاً عند حسابه لقيمة fa[6] لم يستخدم قيمة fa[4] المحسوبة من قبل ، ويمكن جعل الدوال المعرفة تتذكر القيم التى يتم حسابها من قبل وذلك بتعريف الدوال بالصورة الآتية :

تعريف دالة f يث تحفظ القيم التى يتم إيجادها  $f[x_]:=f[x] = rhs$

In[27]:=fa[1]=1;fa[n\_]:=fa[n]=n fa[n-1]

تعريف دالة المضروب تحت اسم fa

بحيث تحفظ القيم التى يتم إيجادها

In[28]:=fa

للاستعلام عن الدالة fa

Out[28]=Global`fa

fa[1] = 1

fa[n\_] := fa[n] = n\*fa[n - 1]

In[29]:=fa[4]

حساب 4! بواسطة fa[4]

Out[29]=24

In[30]:=?fa

للاستعلام عن الدالة fa وسوف نلاحظ انه تم

Out[30]=Global`fa

حفظ جميع قيم الدالة fa التي تم إيجادها

fa[1] = 1

fa[2] = 2

fa[3] = 6

fa[4] = 24

fa[n\_] := fa[n] = n\*fa[n - 1]

In[31]:=fa[6]

حساب 6! بواسطة fa[6]

Out[31]=720

In[32]:=?fa

للاستعلام عن الدالة fa وسوف نلاحظ انه تم

Out[32]=Global`fa

حفظ جميع قيم الدالة fa التي تم إيجادها

fa[1] = 1

fa[2] = 2

fa[3] = 6

fa[4] = 24

fa[5] = 120

fa[6] = 720

fa[n\_] := fa[n] = n\*fa[n - 1]

## ٢ . النهايات Limits

فى بعض الحسابات الرياضية نحتاج الى تعويض أو إحلال لمتغير داخل التعبير الرياضى عندما يأخذ المتغير قيمة معينة فمثلا عند وضع جملة الإحلال  $x = 3$  فهذا يعنى أن يقوم ماثيماتكا باستبدال المتغير  $x$  بالقيمة 3 فى أي مكان بالبرنامج يظهر فيه المتغير  $x$  إلا إذا تم تغير قيمة  $x$  أو حذفها ، ولكن فى بعض الأحيان يكون المطلوب هو استبدال المتغير  $x$  بالقيمة 3 فى تعبير خاص **particular expression** ، ويمكن عمل ذلك فى ماثيماتكا باستخدام المؤثر /. أو المؤثر //. كالآتي :

الوظيفة التى يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر
استبدال المتغير $x$ بالقيمة $value$ فى التعبير $expr$ ويتم تطبيق القاعدة $x \rightarrow value$ مرة واحدة فقط	<b>expr /. x-&gt;value</b>
استبدال المتغير $x$ بالقيمة $xval$ والمتغير $y$ بالقيمة $yval$ فى التعبير $expr$ ويتم تطبيق القاعدة $x \rightarrow xval$ , $y \rightarrow yval$ مرة واحدة فقط	<b>expr /. {x-&gt;xval,y-&gt;yval}</b>
تطبيق القاعدة $rules$ فى التعبير $expr$ مرة واحدة فقط حيث القاعدة $rules$ تكون بالصورة $lhs \rightarrow rhs$	<b>expr /. rules</b>
تطبيق القاعدة $rules$ على كل أجزاء التعبير $expr$ بصورة متكررة حتى نصل الى الناتج النهائى	<b>expr//.rules</b>
تطبيق القاعدة $rules$ كوحدة متكاملة على التعبير $expr$ دون تطبيقها على الأجزاء الفرعية من $expr$	<b>Replace[expr,rules]</b>

In[1]:=1+x^2/.x->3

استبدال المتغير x بالقيمة 3 فى التعبير الرياضى

Out[1]=10

$$x^2 + 1$$

In[2]:=x

عند الاستعلام عن قيمة x نلاحظ أن استخدام

Out[2]=x

المؤثر /. فى استبدال المتغير x بالقيمة 3 لا

يؤثر فى قيمة المتغير x داخل البرنامج

In[3]:=x^2+2x y+y^2/.{x->1,y->2}

استبدال المتغير x بالقيمة 1 والمتغير

Out[3]=9

y بالقيمة 2 فى التعبير الرياضى

$$x^2 + 2xy + y^2$$

In[4]:=t=x^2+2x+1;t/.x->5

إحلال قيمة  $x^2 + 2x + 1$  فى المتغير

Out[4]=36

t ثم حساب قيمة t عندما  $x \rightarrow 5$

In[5]:=f[5]/.f[x\_]->x

تطبيق القاعدة lhs->rhs لحساب f[5]

$$f[x-1]$$

Out[5]=5 f[4]

ونلاحظ أن المؤثر /. يقوم بتطبيق القاعدة

مرة واحدة فقط

In[6]:=f[5]/.{f[1]->1,f[x\_]->x f[x-1]}

عند استخدام المؤثر //. يتم تطبيق القاعدة

Out[6]=120

f[5] بصورة متكررة حتى نصل

الى الناتج النهائى

In[7]:=f[x]^2+2f[x] /. f[x]->a

عند استخدام المؤثر /. يتم تطبيق القاعدة

Out[7]=2a + a^2

على كل الأجزاء فى التعبير الرياضى

عند حساب قيمة  $\frac{\sin(x)}{x}$  لقيم  $x$  التي تقرب من الصفر نلاحظ ما يأتي :

In[8]:=Sin[x]/x /.x->0.6 Out[8]=0.941071	In[12]:=Sin[x]/x /.x->0.2 Out[12]=0.993347
In[9]:=Sin[x]/x /.x->0.5 Out[9]=0.958851	In[13]:=Sin[x]/x /.x->0.1 Out[13]=0.998334
In[10]:=Sin[x]/x /.x->0.4 Out[10]=0.973546	In[14]:=Sin[x]/x /.x->0.01 Out[14]=0.999983
In[11]:=Sin[x]/x /.x->0.3 Out[11]=0.985067	In[15]:=Sin[x]/x /.x->0.001 Out[15]=1.

ولحساب قيمة  $\frac{\sin(x)}{x}$  عندما  $x = 0$  فإن الناتج يكون كمية غير معينة

In[16]:=Sin[x]/x /.x->0

Out[16]=Power::infy: Infinite expression  $\frac{1}{0}$  encountered.

Infinity::indet:

Indeterminate expression

وفي برنامج ماتيماتيكا يمكن حساب النهايات  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  وذلك باستخدام

الدالة Limit كالآتي :

Limit[expr, x->x <sub>0</sub> ]	حساب نهاية الدالة expr عندما
	تقرب x من x <sub>0</sub>

فى الجدول الآتى نضع أمثلة متعددة على النهايات لبعض الدوال

النهاية بلغة ماثيماتكا	النهاية بلغة الرياضيات
In[17]:=Limit[x^2+3x-7,x->2] Out[17]=3	$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3x - 7$
In[18]:=Limit[(x^2-1)/(x-1),x->1] Out[18]=2	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
In[19]:=Limit[(x^2-9)/(x^2-4x+3),x->3] Out[19]=3	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3}$
In[20]:=Limit[(x^2+x-6)/(x^2-4),x->2] Out[20]= $-\frac{5}{4}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$
In[21]:=Limit[(Sqrt[x]-2)/(x-4),x->4] Out[21]= $\frac{1}{4}$	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$
In[22]:=Limit[Sqrt[x^2-4]/(x-2),x->2] Out[22]=Infinity	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$
In[23]:=Limit[x^2(x+h)/(2x+h),h->0] Out[23]= $\frac{x^2}{2}$	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 (x + h)}{2x + h}$
In[24]:=Limit[x/Sqrt[x-1],x->1] Out[24]= Infinity	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sqrt{x - 1}}$

النهاية بلغة ماثيماتكا	النهاية بلغة الرياضيات
In[25]:=Limit[Sin[x]/x,x->0] Out[25]=1	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$
In[26]:=Limit[(Cos[x]-1)/x^2,x->0] Out[26]= $-\frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$
In[27]:=Limit[x^2/(Sec[x]-1),x->0] Out[27]=2	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sec(x) - 1}$
In[28]:=Limit[Sin[x-Pi/4]/(x-Pi/4)^2, x->Pi/4] Out[28]=Infinity	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}$
In[29]:=Limit[Tan[3x]/(2x^2+5x),x->0] Out[29]= $\frac{3}{5}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{2x^2 + 5x}$
In[30]:=Limit[(2x^2-3x) / (3x^2+2),x->Infinity] Out[30]= $\frac{2}{3}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x}{3x^2 + 2}$
In[31]:=Limit[x^2 Sin[1/x^2],x->Infinity] Out[31]=1	$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$
In[32]:=Limit[(1+1/n)^n,n->Infinity] Out[32]=E	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

### ٣ . التفاضل Differentiation

يستطيع برنامج ماثميكا إجراء عمليات التفاضل للدوال الرياضية المختلفة في صورتها الرمزية في متغير واحد أو متغيرات متعددة ويتم الحصول على النتائج بصورة رمزية سواء كان التفاضل كلي Total أو تفاضل جزئي Partial ويتم ذلك في ماثميكا باستخدام الأمر D كالآتي :

الصيغة العامة للأمر في ماثميكا	الوظيفة التي يقوم بها الأمر
$D[f,x]$	حساب المشتقة الأولى $\frac{df}{dx}$ إذا كانت الدالة $f$ في متغير واحد أو حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial f}{\partial x}$ إذا كانت الدالة $f$ في أكثر من متغير
$D[f,\{x,n\}]$	حساب المشتقة $\frac{d^n f}{dx^n}$ إذا كانت الدالة $f$ في متغير واحد أو حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ إذا كانت الدالة $f$ في أكثر من متغير
$D[f,x_1,x_2,\dots]$	حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \dots f$
$D[f,x,NonConstants-\{v_1,v_2,\dots\}]$	حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial f}{\partial x}$ مع اعتبار أن المتغيرات $v_1, v_2, \dots$ دوال تعتمد على المتغير $x$

فى الجدول الآتى نضع أمثلة لتفاضل بعض الدوال

التفاضل بلغة ماتيماتيكا	التفاضل بلغة الرياضيات
In[1]:=D[x^n,x] Out[1]= n x <sup>n-1</sup>	$\frac{d}{dx} x^n$
In[2]:=D[x^5+4x^3-2x+6,x] Out[2]= -2 + 12 x <sup>2</sup> + 5 x <sup>4</sup>	$\frac{d}{dx} (x^5 + 4x^3 - 2x + 6)$
In[3]:=D[x^5+4x^3-2x+6,{x,2}] Out[3]=24 x + 20 x <sup>3</sup>	$\frac{d^2}{dx^2} (x^5 + 4x^3 - 2x + 6)$
In[4]:=D[x^n,{x,3}] Out[4]=(-2 + n) (-1 + n) n x <sup>n-3</sup>	$\frac{d^3}{dx^3} x^n$
In[5]:=D[Sin[x],x] Out[5]=Cos[x]	$\frac{d}{dx} \sin(x)$
In[6]:=D[Tan[x],x] Out[6]=Sec <sup>2</sup> [x]	$\frac{d}{dx} \tan(x)$
In[7]:=D[x^3 Cos[x],x] Out[7]=3 x <sup>2</sup> Cos[x] - x <sup>3</sup> Sin[x]	$\frac{d}{dx} x^3 \cos(x)$
In[8]:=D[4x^2 Sec[x^3],x] Out[8]=8x <sup>2</sup> Sec[x <sup>3</sup> ] + 12 x <sup>4</sup> Sec[x <sup>3</sup> ] Tan[x <sup>3</sup> ]	$\frac{d}{dx} 4x^2 \sec(x^3)$

التفاضل بلغة ماتيماتكا	التفاضل بلغة الرياضيات
In[9]:=D[ArcSin[x],x] Out[9]= $\frac{1}{\text{Sqrt}[1-x^2]}$	$\frac{d}{dx} \sin^{-1}(x)$
In[10]:=D[ArcTan[x^2],x] Out[10]= $\frac{2x}{1+x^4}$	$\frac{d}{dx} \tan^{-1}(x^2)$
In[11]:=D[Sin[t]/t,t] Out[11]= $\frac{\text{Cos}[t]}{t} - \frac{\text{Sin}[t]}{t^2}$	$\frac{d}{dx} \frac{\sin(t)}{t}$
In[12]:=D[Log[x]^2,x] Out[12]= $\frac{2\text{Log}[x]}{x}$	$\frac{d}{dx} (\text{Log}(x))^2$
In[13]:=D[f[x],x] Out[13]=f'[x]	$\frac{d}{dx} f(x)$
In[14]:=D[f[x^2],x] Out[14]=2 x f'[x]	$\frac{d}{dx} f(x^2)$
In[15]:=D[x^2+y[x]^3,x] Out[15]= 2x + 3 ( y[x] )^2 y'[x]	$\frac{d}{dx} (x^2 + (y(x))^3)$
In[16]:=D[x^2+y^3,x,NonConstants->{y}] Out[16]= 2x + 3 y^2 D[y, x, NonConstants -> {y}]	$\frac{d}{dx} (x^2 + y^3)$ مع اعتبار أن y دالة في x

التفاضل بلغة ماتيماتكا	التفاضل بلغة الرياضيات
In[17]:=D[x^2 y+Cos[x y],x] Out[17]=2 x y - y Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 y + \cos(xy))$
In[18]:=D[x^2 y+Cos[x y],y] Out[18]=x^2 - x Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial y} (x^2 y + \cos(xy))$
In[19]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,x] Out[19]=2y - y^2 Cos[x y]	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^2 y + \cos(xy))$
In[20]:=D[x^2 y+Cos[x y],y,y] Out[20]=- x^2 Cos[x y]	$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (x^2 y + \cos(xy))$
In[21]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,y] Out[21]=2x - x y Cos[x y] - Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y + \cos(xy))$
In[22]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,x,x] Out[22]=y^3 Sin[x y]	$\frac{\partial^3}{\partial x^3} (x^2 y + \cos(xy))$
In[23]:=D[x^2 y+Cos[x y],y,y,y] Out[23]=x^3 Sin[x y]	$\frac{\partial^3}{\partial y^3} (x^2 y + \cos(xy))$
In[24]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,y,x] Out[24]=2 -2y Cos[x y] + x y^2 Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 y + \cos(xy))$
In[25]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,y,y] Out[25]=- 2 x Cos[x y] + x^2 y Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (x^2 y + \cos(xy))$

وعند إجراء التفاضل على دالة  $f$  في عدة متغيرات وبحيث يتم إدخالها بالرمز  $f$  نلاحظ أن ناتج التنفيذ يكون كالآتي :

In[26]:=D[f[x,y],x] Out[26]= $f^{(1,0)}[x, y]$	$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ تمثل $f^{(1,0)}[x, y]$
In[27]:=D[f[x,y],y] Out[27]= $f^{(0,1)}[x, y]$	$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ تمثل $f^{(0,1)}[x, y]$
In[28]:=D[f[x,y],x,x] Out[28]= $f^{(2,0)}[x, y]$	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)$ تمثل $f^{(2,0)}[x, y]$
In[29]:=D[f[x,y],x,y] Out[29]= $f^{(1,1)}[x, y]$	$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ تمثل $f^{(1,1)}[x, y]$
In[30]:=D[f[x,y],x,y,y] Out[30]= $f^{(1,2)}[x, y]$	$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)$ تمثل $f^{(1,2)}[x, y]$
In[31]:=D[f[x,y,z],x] Out[31]= $f^{(1,0,0)}[x, y, z]$	$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z)$ تمثل $f^{(1,0,0)}[x, y, z]$
In[32]:=D[f[x,y,z],x,x,y,z, z,z] Out[32]= $f^{(2,1,3)}[x, y, z]$	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^3}{\partial z^3} f(x, y, z)$ تمثل $f^{(2,1,3)}[x, y, z]$

نعلم أن إذا كانت  $f = f(x,y)$  فإن التفاضلة الكلية ( Total Differential ) يرمز لها  $df$  وتعرف بالصورة

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

والأمر  $D$  كما رأينا فى المثال  $D[x^n, x]$  يقوم بحساب المشتقة الجزئية للدالة  $x^n$  بالنسبة الى  $x$  مع اعتبار أن  $n$  ثابت لا يعتمد على  $x$  وفى ماتيماتىكا يوجد أمر آخر يرمز له  $Dt$  ويقوم بحساب المشتقة الكلية Total Derivative وعند تنفيذه فإنه يأخذ جميع المتغيرات فى الاعتبار .

الوظيفة التى يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر فى ماتيماتىكا
حساب التفاضلة الكلية $df$	$Dt[f]$
حساب المشتقة الكلية $\frac{df}{dx}$	$Dt[f,x]$
حساب المشتقة الكلية من رتبة $n$ آي حساب $\frac{d^n f}{d x^n}$	$Dt[f,\{x,n\}]$
حساب المشتقة الكلية $\frac{df}{dx}$ مع اعتبار أن المتغيرات $v1,v2,...$ ثوابت لا تعتمد على المتغير $x$ أي أن $dv1=0, dv2=0, ...$	$Dt[f,x,Constants->\{v1,v2,...\}]$

في الجدول الآتي نضع أمثلة لتفاضلات بعض الدوال

التفاضلة بلغة ماتيماتيكا	التفاضلة بلغة الرياضيات
In[33]:=Dt[f[x]] Out[33]=Dt[x] f'[x]	$df = f'(x) dx$
In[34]:= Dt[x^n] Out[34]= $n x^{n-1} Dt[x] + x^n Dt[n] Log[x]$	$dx^n = nx^{n-1} dx + x^n Log[x] dn$
In[35]:=Dt[x^n,Constants->{n}] Out[35]= $n x^{n-1} Dt[x,Constants->\{n\}]$	$dx^n = nx^{n-1} dx$ حيث n ثابت
In[36]:=Dt[f[x,y]] Out[36]= Dt[y] f <sup>(0,1)</sup> [x,y] + Dt[x] f <sup>(1,0)</sup> [x,y]	$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$
In[37]:= Dt[x^2Sin[y]+y^2,y] Out[37]= $2y + x^2 Cos[y] + 2x Dt[x,y] Sin[y]$	$\frac{d}{dy}(x^2 \sin(y) + y^2) = 2y + x^2 \cos(y) + 2x \sin(y) \frac{dx}{dy}$
In[38]:=Dt[x^2+y^2+z^2,x] Out[38]= $2x + 2y Dt[y,x] + 2z Dt[z,x]$	$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 + z^2) = 2x + 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx}$
In[39]:= Dt[x^2+y^2+z^2,x,Constants>{z}] Out[39]= $2x + 2y Dt[y,x,Constants->\{z\}]$	$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 + z^2) = 2x + 2y \frac{dy}{dx}$ حيث z ثابت

## ٤ . التكامل Integration

برنامج ماثميكا قادر على حساب أنواع عديدة من التكاملات لتعبيرات رياضية تتوى على كثيرات الحدود والدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية ... الخ ، وناتج التكامل يكون فى صورة رمزية ويمكن حساب التكاملات المتعددة ( الثنائية والثلاثية ... الخ ) وكذلك التكاملات المحدودة سواء كان حدود التكامل أعداد ثابتة أو دوال ويتم ذلك باستخدام الأمر **Integrate** كالآتى:

الصيغة العامة للأمر فى ماثميكا	الوظيفة التى يقوم بها الأمر
<b>Integrate[f,x]</b>	حساب التكامل $\int f \, dx$
<b>Integrate[f,{x,x0,x1}]</b>	حساب التكامل المحدود $\int_{x0}^{x1} f \, dx$
<b>Integrate[f,{x,x0,x1},{y, y0,y1}]</b>	حساب التكامل الثنائى $\int_{x0}^{x1} \int_{y0}^{y1} f \, dy \, dx$
<b>Integrate[f,{x,x0,x1},{y, y0,y1},...]</b>	حساب التكامل $\int_{x0}^{x1} \int_{y0}^{y1} \dots f \dots dy \, dx$

في الجدول الآتي نضع أمثلة لتكامل بعض الدوال

التكامل بلغة ماثميكا	التكامل بلغة الرياضيات
In[1]:=Integrate[x^n,x] Out[1]= $\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\int x^n dx$
In[2]:=Integrate[x^n,n] Out[2]= $\frac{x^n}{\text{Log}[x]}$	$\int x^n dn$
In[3]:=Integrate[1/x,x] Out[3]=Log[x]	$\int \frac{1}{x} dx$
In[4]:=Integrate[Log[x],x] Out[4]= -x + x Log[x]	$\int \text{Log}(x) dx$
In[5]:=Integrate[x^3 Exp[x],x] Out[5]= E^x (-6 + 6 x - 3 x^2 + x^3)	$\int x^3 e^x dx$
In[6]:=Integrate[1/(x^2+1),x] Out[6]=ArcTan[x]	$\int \frac{1}{x^2+1} dx$
In[7]:=Integrate[1/Sqrt[1-x^2],x] Out[7]=ArcSin[x]	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

التكامل بلغة ماثياتيكا	التكامل بلغة الرياضيات
In[8]:=Integrate[1/Sqrt[9-x^2],x] Out[8]=ArcSin[ $\frac{x}{3}$ ]	$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$
In[9]:=Integrate[1/Sqrt[1+x^2],x] Out[9]=ArcSinh[x]	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$
In[10]:=Integrate[x^2 Sin[x],x] Out[10]=2 Cos[x] - x^2 Cos[x] + 2 x Sin[x]	$\int x^2 \sin(x) dx$
In[11]:=Integrate[y x^2,x] Out[11]= $\frac{y x^3}{3}$	$\int y x^2 dx$
In[12]:=Integrate[x^2,{x,1,4}] Out[12]= 21	$\int_1^4 x^2 dx$
In[13]:=Integrate[x^2+y^2,{x,0,a},{y,0,3x}] Out[13]= 3 a^4	$\int_0^a \int_0^{3x} (x^2 + y^2) dy dx$
In[14]:=Integrate[xy+z,{z,0,1},{y,1,5z}, {x,y,3y+5z}] Out[14]= 286	$\int_0^1 \int_1^{5z} \int_y^{3y+5z} (x^2 + y^2) dy dx$
In[15]:=Integrate[xy+zw^2,{w,0,2}, {z,1,w},{y,0,z+w},{x,w,y^2+2w}] Out[15]= $\frac{37916}{315}$	$\int_0^2 \int_1^w \int_0^{z+w} \int_w^{y^2+2w} (xy+zw^2) dx dy dz dw$

## ٥. المعادلات التفاضلية Differential Equations

المعادلة التفاضلية هي معادلة تربط بين المتغيرات المستقلة والدالة التابعة ومشتقات هذه الدالة ، وإذا كانت المعادلة التفاضلية تحتوي على متغير مستقل واحد فإنها تسمى معادلة تفاضلية عادية ( Ordinary Differential Equation ( ODE وإذا كانت المعادلة تحتوي على متغيرين مستقلين أو أكثر فإنها تسمى معادلة تفاضلية جزئية ( Partial Differential Equation PDE ) .

ورتبة Order المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلى مشتقة موجودة بالمعادلة بينما درجة Degree المعادلة التفاضلية هي الأس المرفوع إليه المشتقة ذات أكبر رتبة . وفي الجدول الآتي نضع بعض الأمثلة للمعادلات التفاضلية .

الدرجة Degree	الرتبة Order	معادلات تفاضلية عادية ( ODE )
الدرجة الأولى	الرتبة الأولى	$\frac{dy}{dx} = x + 5$
الدرجة الأولى	الرتبة الثانية	$\frac{d^2 y}{d x^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = x$
الدرجة الثانية	الرتبة الأولى	$\left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + y = x$
الدرجة الثانية	الرتبة الثانية	$\left( \frac{d^2 y}{d x^2} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^3 + 3y = x^2$
الدرجة الأولى	الرتبة الثالثة	$y''' + 2(y'')^2 + y' = \cos(x)$

الدرجة Degree	الرتبة Order	معادلات تفاضلية جزئية ( PDE )
الدرجة الأولى	الرتبة الأولى	$\frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = f$
الدرجة الأولى	الرتبة الثانية	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y^2$

يقال للمعادلة التفاضلية ( عادية ODE أو جزئية PDE ) أنها معادلة تفاضلية خطية **Linear Differential Equation** إذا كان كل متغير تابع وكذلك المشتقات الموجودة بالمعادلة جميعها من الدرجة الأولى وأيضا المعادلة التفاضلية لا تحتوي على حواصل ضرب لمتغيرات تابعة أو مشتقات أو خليط من حاصل ضربيهما ، وإذا لم تكن المعادلة التفاضلية خطية فإنها تسمى معادلة تفاضلية غير خطية ، والمعادلة التفاضلية تسمى مسألة القيمة الابتدائية **Initial Value Problem** إذا كان الحل يحقق شروط ابتدائية معطاة

ويستطيع برنامج ماتيماتكا إيجاد حل أنواع متعددة من المعادلات التفاضلية وذلك بواسطة الأمر **Dsolve** كالآتي :

حل المعادلة التفاضلية eqn وإيجاد المتغير التابع  $y[x]$  بدلالة المتغير المستقل  $x$

**DSolve[eqn, y[x], x]**

المعادلة التفاضلية بلغة ماتيماتكا	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
<b>In[1]:=DSolve[y'[x]==y[x],y[x],x]</b> <b>Out[1]={{y[x] -&gt; E<sup>x</sup> C[1]}}</b>	$\frac{dy}{dx} = y$
<b>In[2]:=DSolve[y'[x]==Cos[x],y[x],x]</b> <b>Out[2]={{y[x] -&gt; C[1] + Sin[x]}}</b>	$\frac{dy}{dx} = \cos(x)$
<b>In[3]:=DSolve[y'[x]+(1/x)y[x]==1,y[x],x]</b> <b>Out[3]={{y[x] -&gt; <math>\frac{x}{2} + \frac{C[1]}{x}</math>}}</b>	$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 1$
<b>In[4]:=DSolve[{y''[x]+y[x]==x^2 - x+2}, y[x],x]</b> <b>Out[4]= {{y[x] -&gt; <math>-x + x^2 + C[2] \cos[x] - C[1] \sin[x]</math>}}</b>	$y'' + y = x^2 - x + 2$
<b>In[5]:= DSolve[x^2y''[x]-2x y'[x]+2y[x] == x^4 Exp[x],y[x],x]</b> <b>Out[5]= {{y[x] -&gt; <math>x(-2 E^x + E^x x + C[1] + x C[2])</math>}}</b>	$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = x^4 e^x$

$\frac{d^3 y}{d x^3} + 3 \frac{d^2 y}{d x^2} - 4y = x e^{-2x}$	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
<b>In[6]:=</b> Dsolve[y'''[x]+3y''[x]-4y[x]==x Exp[-2x],y[x],x] <b>Out[6]=</b> $\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow -\frac{1}{18} (x^2 + x^3) e^{-2x} + (C[1] + x C[2]) e^{-2x} + e^x C[3] \right\} \right\}$	المعادلة التفاضلية بلغة ماثيماتكا

$\frac{d^4 y}{d x^4} + 2 \frac{d^3 y}{d x^3} - 3 \frac{d^2 y}{d x^2} = 3e^{2x} + 4\sin(x)$	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
<b>In[7]:=</b> DSolve[y''''[x]+2y'''[x]-3y''[x]==3Exp[2x]+4Sin[x],y[x],x] <b>Out[7]=</b> $\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \frac{C[1]}{e^{3x}} + C[2] + x C[3] + e^x C[4] + \frac{1}{180} (27e^{2x} + 72 \cos[x] + 144 \sin[x]) \right\} \right\}$	المعادلة التفاضلية بلغة ماثيماتكا

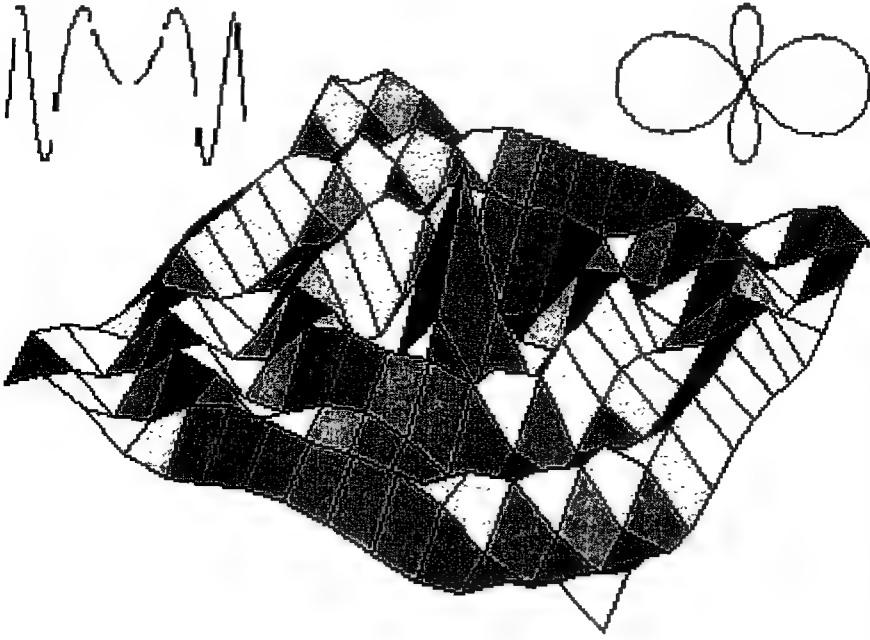
$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - 9)y = 0$ <p style="text-align: center;">Bessel Equation معادلة بيسل</p>	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
<b>In[8]:=</b> DSolve[x^2 y''[x]+x y'[x]+(x^2-9) y[x]==0,y[x],x] <b>Out[8]=</b> { {y[x] -> BesselY[3, x] C[1] + BesselJ[3, x] C[2]} }	المعادلة التفاضلية بلغة ماثيماتكا

حل المعادلة التفاضلية eqn والتي تحقق الشرط الابتدائي  $y[x_0]=a$

`DSolve[{eqn,y[x0]==a}, y[x], x]`

المعادلة التفاضلية بلغة ماتيماتكا	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
<code>In[9]:=DSolve[{y'[x]==y[x],y[0]=3},y[x],x]</code> <code>Out[9]={{y[x]-&gt;3 E<sup>x</sup>}}</code>	$\frac{dy}{dx} = y$ , $y[0]=3$
<code>In[10]:=</code> <code>DSolve[{y'[x]==Cos[x],y[0]==2},y[x],x]</code> <code>Out[10]={{y[x]-&gt;2 + Sin[x]}}</code>	$\frac{dy}{dx} = \cos(x)$ , $y[0]=2$
<code>In[11]:=</code> <code>DSolve[{y'[x]+(2/x)y[x]==y[x],</code> <code>y[1]=-2},y[x],x]</code> <code>Out[11]= {{y[x]-&gt;-Sqrt[<math>\frac{18}{5x^4} + \frac{2x}{5}</math>]}}</code>	$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = y$ , $y[1]=-2$
<code>In[12]:=</code> <code>DSolve[{y''[x] - 3y'[x]+2y[x]==Exp[x] +</code> <code>Exp[2x],y[0]==1,y'[0]==1},y[x],x]</code> <code>Out[12]={{y[x]-&gt;E<sup>x</sup> - E<sup>x</sup> x + E<sup>2x</sup> x}}</code>	$\frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = e^x + e^{2x}$ $y[0]=1$ , $y'[0]=1$

## الباب الخامس ماثيماتيكاً ورسم الدوال



فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكاً  
والخاصة بالموضوعات الآتية :

١. رسم الدوال فى المستوى Two-Dimensional Plotting
٢. رسم الدوال فى الفراغ Three-Dimensional Plotting
٣. رسم الدوال البارامترية Parametric Plots



## الباب الخامس

### ماثيماتيكاً ورسم الدوال

يستطيع برنامج ماثيماتيكاً أداء دور كبير فى عمليات رسم الدوال فى المستوى والفراغ وكذلك الدوال فى الصورة البارامترية ولتنفيذ عملية رسم الدوال فى ماثيماتيكاً نحتاج الى تحديد ثلاث أشياء أساسية هى :

- تعريف الدالة المطلوب رسمها
- تعريف المتغير المستقل Independent variable
- تعريف نطاق المتغير المستقل Domain

ويحتوى ماثيماتيكاً على العديد من الاختيارات Options التى تتحكم فى شكل ومواصفات الرسم graph وبعض هذه الاختيارات يكون فعال Default بمعنى أن ماثيماتيكاً يقوم بتنفيذها أوتوماتيك Automatic عند بداية التشغيل فمثلا الاختيارات

- تحديد مقياس رسم مناسب scale
- تحديد عدد النقاط التى يتم حساب قيم الدالة عندها
- اختيار المدى Range للمتغير التابع Dependent variable
- تحديد وترقيم محاور الإحداثيات

تعتبر من الاختيارات الفعالة فى ماثيماتيكاً وكل اختيار له اسم محدد ويمكن للمستخدم تغيير الاختيارات الفعالة فى ماثيماتيكاً وإضافة أى اختيارات أخرى حسب طبيعة الرسم المطلوب .

## ١. رسم الدوال في المستوى Two-Dimensional Plotting

الدالة ذات المتغير الواحد يرمز لها  $y = f(x)$  حيث  $x$  يسمى بالمتغير المستقل ،  $y$  يسمى بالمتغير التابع ونطاق الدالة يقع على محور  $x$  والمدى يقع على محور  $y$  وترسم الدالة في المستوى ويمثلها مجموعة النقاط  $(x,y)$  في المستوى التي تحقق  $y = f(x)$  ، ومن أهم أوامر رسم الدوال في ماتيماتيكيا هو الأمر Plot وله الصيغة العامة الآتية :

**Plot[f, {x, xmin, xmax}]**

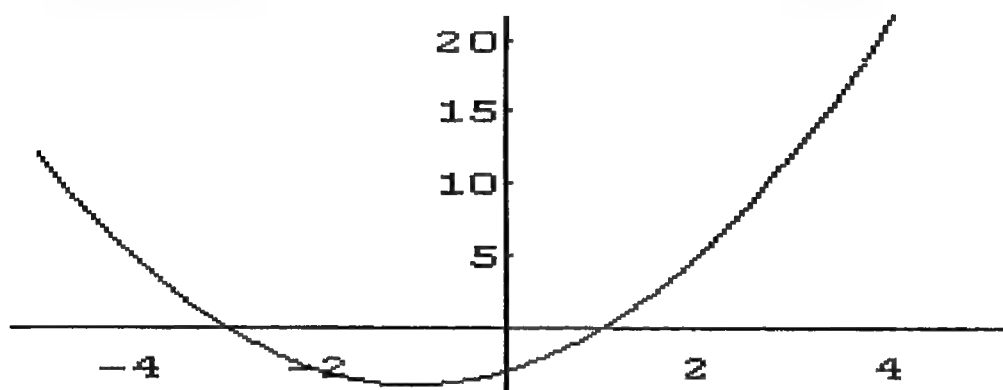
رسم الدالة  $f$  كدالة في المتغير  $x$  في النطاق من  $x = \text{xmin}$  الى  $x = \text{xmax}$

**Plot[{f1, f2, ...}, {x, xmin, xmax}]**

رسم مجموعة دوال  $f1, f2, \dots$  في المتغير  $x$  في النطاق من  $x = \text{xmin}$  الى  $x = \text{xmax}$

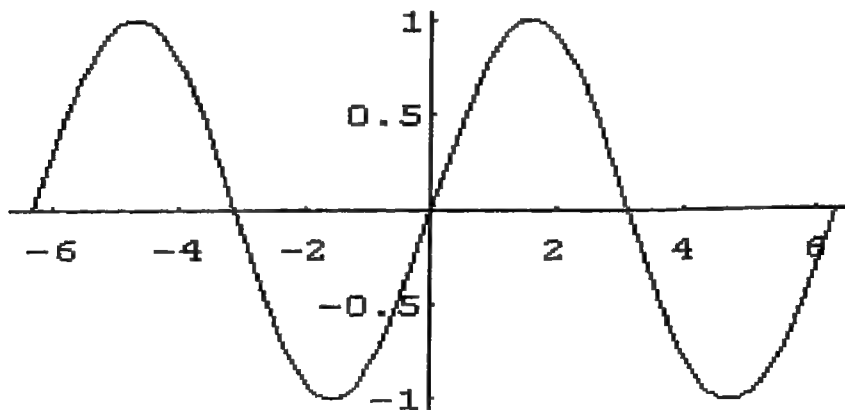
والناتج من تنفيذ أمر Plot يكون صورة مرسومة " Graphics Object " للدالة أو لمجموعة الدوال المعطاة وفقا للاختيارات الفعالة .

رسم الدالة  $x^2 + 2x - 3$  في الفترة  $[-5, 5]$  **In[1]:=Plot[x^2+2x-3,{x,-5,5}]**



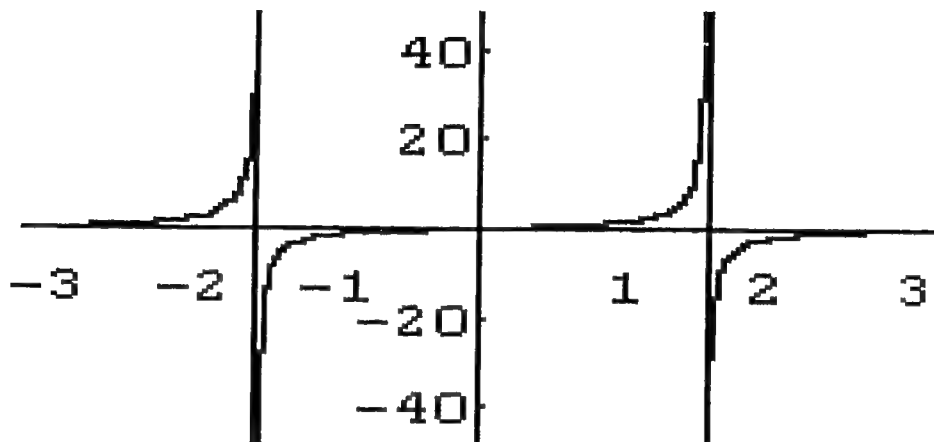
**Out[1]=Graphics-**

رسم الدالة  $\sin x$  في الفترة  $[-2\pi, 2\pi]$  `In[2]:= Plot[Sin[x],{x,-2Pi,2Pi}]`

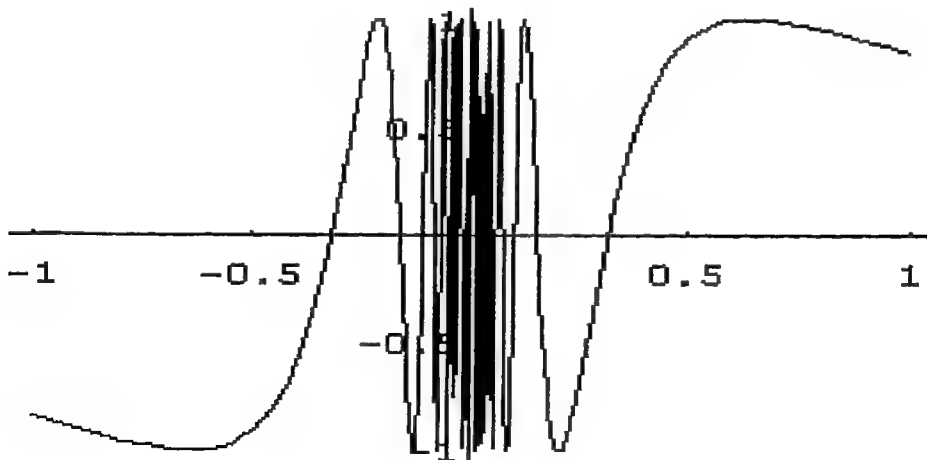


والأمر `Plot` في ماتيماتيكا قادر على رسم دوال لها نقاط شاذة في نطاق التعريف حيث يقوم ماتيماتيكا باختيار مقياس رسم مناسب .

رسم الدالة  $\tan(x)$  في الفترة  $[-3,3]$  `In[3]:= Plot[Tan[x],{x,-3,3}]`

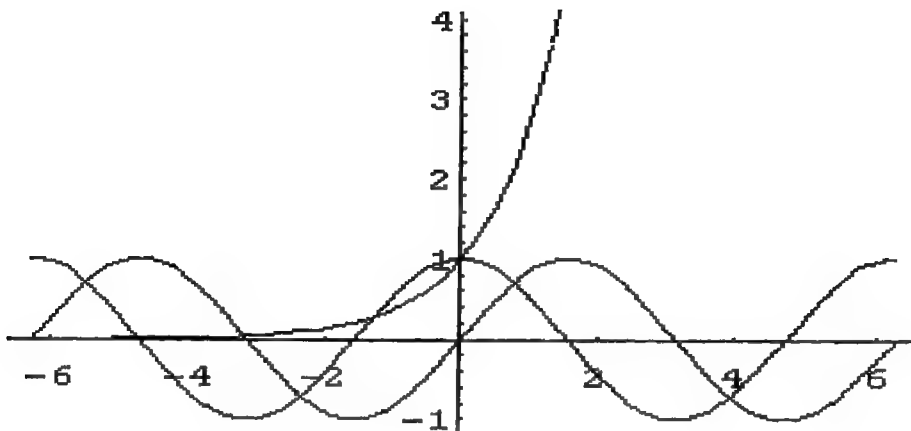


**In[4]:=Plot[ Sin[1/x],{x,-1,1}]**    الدالة  $\sin(1/x)$  لها نقطة شاذة عند  $x=0$

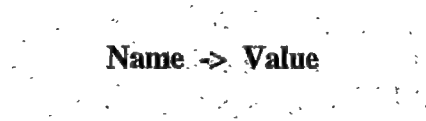


**In[5]:=Plot[{Sin[x],Cos[x],Exp[x]},{x,-2Pi,2Pi}]**

لرسم مجموعة من الدوال على نفس النطاق



ونلاحظ في الأمثلة السابقة انه تم رسم الدوال بدون إضافة أي اختيارات **Options** الى أمر الرسم **Plot** بمعنى أن الرسوم تم تنفيذها بالاختيارات الفعالة **default** الموجودة داخل ماتيماتكا ، ولكن كان من الممكن إضافة أي اختيارات للرسم حيث أن كل اختيار له اسم **Name** ويأخذ قيمة **Value** ويتم وضع الاختيار **Option** داخل أمر الرسم **Plot** في صورة قاعدة



ويمكن وضع أكثر من اختيار داخل أمر الرسم **Plot** بحيث يفصل كل منها علامة الفاصلة " , " ومن القيم **Value** المستخدمة في هذه الاختيارات

وتعني أن يتم الاختيار اتوماتيك وفقا لأسلوب ماتيماتكا	<b>Automatic</b>
وتعني عمل كل ما هو متاح من ماتيماتكا في هذا الاختيار	<b>All</b>
وتعني عدم استخدام ما هو متاح من ماتيماتكا في هذا الاختيار	<b>None</b>
وتعني تنفيذ الاختيار	<b>True</b>
وتعني عدم تنفيذ الاختيار	<b>False</b>

وفي حالة عدم تحديد قيمة خاصة لاختيار ما للأمر **Plot** فإن ماتيماتكا يقوم أوتوماتيك باستخدام القيمة الفعالة لهذا الاختيار وبصفة عامة يمكن الاستعلام عن القيم الفعالة للاختيارات المتاحة لدالة **function** باستخدام الأمر **Option** في الصورة

**Option[function]**

للتعرف على القيم الفعالة للاختيارات الخاصة بالأمر `Plot` `In[6]:=Option[Plot]`

```
Out[6]={ AspectRatio -> GoldenRatio^(-1), Axes -> Automatic,
AxesLabel -> None, AxesOrigin -> Automatic, AxesStyle ->
Automatic, Background -> Automatic ColorOutput ->
Automatic, Compiled -> True, DefaultColor -> Automatic, Epilog
-> {}, Frame -> False, FrameLabel -> None, FrameStyle ->
Automatic, FrameTicks -> Automatic, GridLines -> None,
MaxBend -> 10. PlotDivision>20., PlotLabel -> None, PlotPoints
-> 25, PlotRange -> Automatic, PlotRegion -> Automatic,
PlotStyle -> Automatic, Prolog -> {}, RotateLabel -> True, Ticks
-> Automatic, DefaultFont := $DefaultFont, DisplayFunction :=
$DisplayFunction }
```

وإذا تم تحديد قيم خاصة لاختيارات دالة `function` وأردنا استخدام هذه القيم الجديدة أكثر من مرة بعد ذلك فإنه يمكن جعلها قيم فعالة باستخدام الأمر `SetOptions` في الصورة

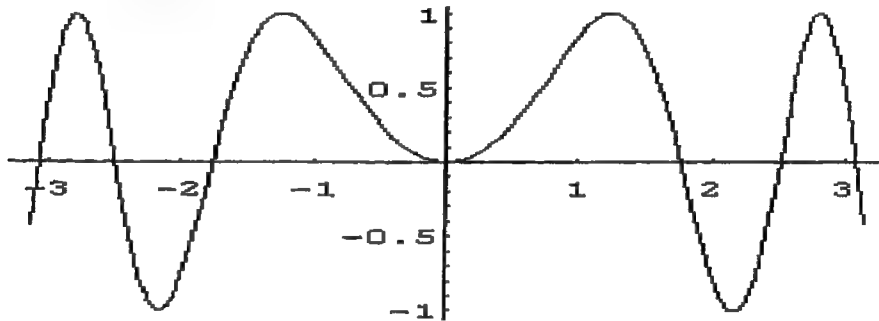
`SetOptions[function,Name1->value1,Name2->value2,...]`

وسوف نتعرف الآن على بعض الاختيارات `Options` المستخدمة مع الأمر `Plot` والقيم الفعالة لكل منها وقيم أخرى بديلة للتحكم في مواصفات الرسم وكيفية تغيرها .

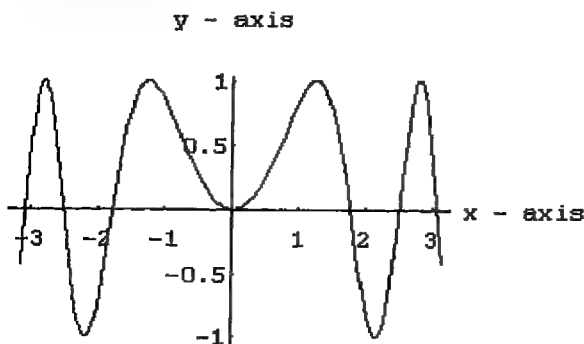
Option Name اسم الاختيار Default value وقيمة الفعالة	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار Another values
PlotRange -> Automatic	تحديد مدى الإحداثيات التي يتم التعامل معها في الرسم	PlotRange -> {ymin,ymax} PlotRange->{{xmin,xmax}, {ymin,ymax}} PlotRange -> All
PlotLabel -> None	كتابة عنوان على الرسم	PlotLabel -> "expr" حيث "expr" تعني أي عنوان يتم كتابته على الرسم
Frame -> False	إمكانية عمل إطار حول الرسم	عمل إطار حول الرسم Frame -> True
FrameLabel -> None	إمكانية كتابة عنوان على الإطار حول الرسم	FrameLabel -> "graph(1)" كتابة العنوان graph(1) على الإطار حول الرسم
AxesOrigin -> Automatic	تحديد نقطة الأصل	AxesOrigin -> {x0,y0} تحديد النقطة (x0,y0) كنقطة أصل
Axes -> Automatic	رسم محاور الإحداثيات	Axes -> None عدم رسم محاور للإحداثيات
AxesLabel -> None	كتابة عناوين على المحاور	AxesLabel -> {"y-axes"} كتابة العنوان y-axes على محور y فقط AxesLabel -> {"x-label", "y-label"} كتابة العنوان x-label على محور x والعنوان y-label على محور y
GradLines -> None	لعمل رسم شبكي يحتوي بداخله على رسم الدالة	GradLines -> Automatic

Option Name اسم الاختيار	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار Another values
Default value قيمته الفعالة		
<b>AspectRatio -&gt; 1</b> <b>GoldenRatio</b> حيث <b>GoldenRatio <math>\equiv 1.61803</math></b>	تقل نسبة واجهة الرسم وهي النسبة بين ارتفاع وعرض الرسم	<b>AspectRatio-&gt; Automatic</b> <b>AspectRatio-&gt;n</b> اختيار عدد n يمثل النسبة بين ارتفاع وعرض منطقة الرسم
<b>Ticks -&gt; Automatic</b>	ترقيم محاور الإحداثيات	<b>Ticks -&gt; None</b> عدم ترقيم المحاور <b>Ticks -&gt; {Automatic, None}</b> ترقيم محور x فقط <b>Ticks -&gt; {None, Automatic}</b> ترقيم محور y فقط
<b>Plot Points -&gt; 25</b>	اختيار عدد n يمثل عدد النقاط في العينة والتي يتم حساب قيم الدالة عندها	<b>Plot Points -&gt; n</b>
<b>MaxBend -&gt; 10</b>	اختيار عدد n يمثل أكبر زاوية التواء بين القطع المتعاقبة على المنحنى	<b>MaxBend -&gt; n</b>
<b>PlotDivison -&gt; 20</b>	أكبر معامل يتم به تقسيم الفترة المعطاة إلى فترات جزئية	<b>PlotDivison -&gt; n</b> اختيار عدد n يمثل أكبر تقسيم ممكن من الفترات الجزئية للفترة المعطاة
<b>Background -&gt; Automatic</b>	اختيار لون خلفية الرسم	<b>Background -&gt; GrayLevel[x]</b> جعل الخلفية باللون الرمادي بمستوى تلوين x يتراوح بين 0,1
<b>DisplayFunction-&gt; \$DisplayFunction</b>	إظهار رسم الدالة	<b>DisplayFunction-&gt; Identity</b> منع ظهور رسم الدالة

**In[ 7]:= Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi}]** رسم الدالة  $\sin x^2$  في الفترة  $[-\pi, \pi]$

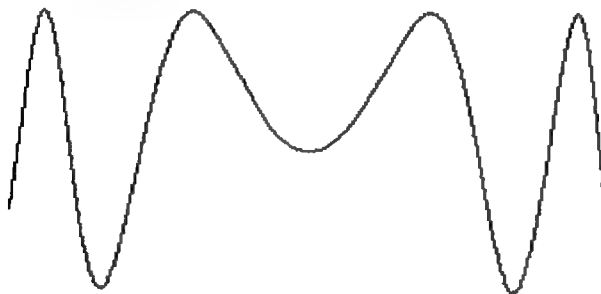


**In[8]:=Plot[ Sin[x^2],{x,-Pi,Pi}, AxesLabel->{"x - axis","y - axis"}]**



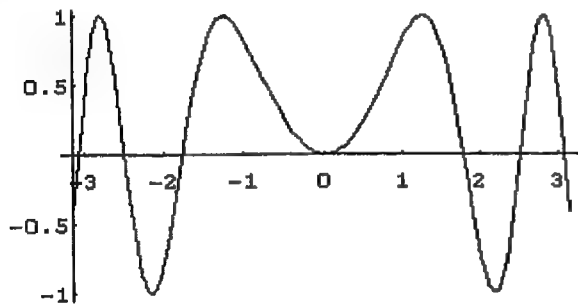
ولوضع العنوان  
على المحور الأفقي والعنوان  
" y - axis " على المحور الرأسي

**In[9]:= Plot[ Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},Axes->None]**



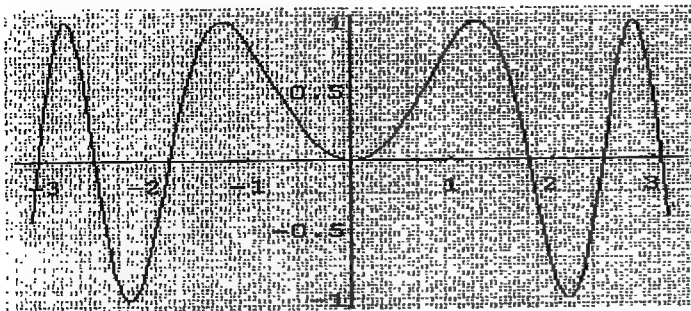
رسم الدالة  $\sin x^2$  في  
الفترة  $[-\pi, \pi]$  وحذف  
المحاور من الرسم

**In[10]:=Plot[ Sin[x^2],{x,-Pi,Pi}, AxesOrigin->{-Pi,0}]**



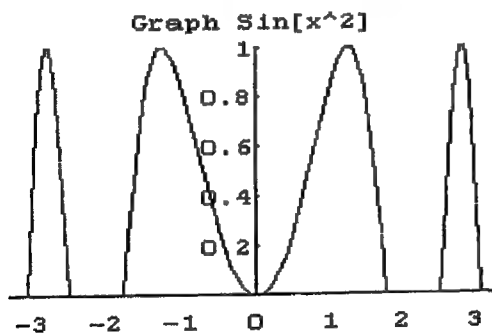
لرسم الدالة  $\sin x^2$  في  
الفترة  $[-\pi, \pi]$  وجعل  
نقطة الأصل هي النقطة  
 $(-\pi, 0)$

**In[11]:=Plot[ Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},Background->GrayLevel[0.5]]**



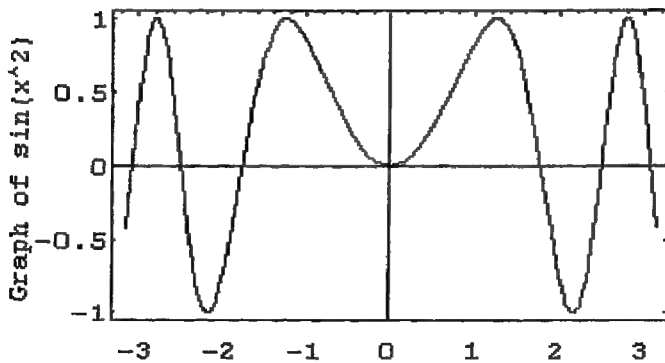
لرسم الدالة  $\sin x^2$   
في الفترة  $[-\pi, \pi]$  مع  
جعل خلفية الرسم  
باللون الرمادي

**In[12]:=Plot[ Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},PlotRange->{0,1},  
PlotLabel->"Graph Sin[x^2]"]**



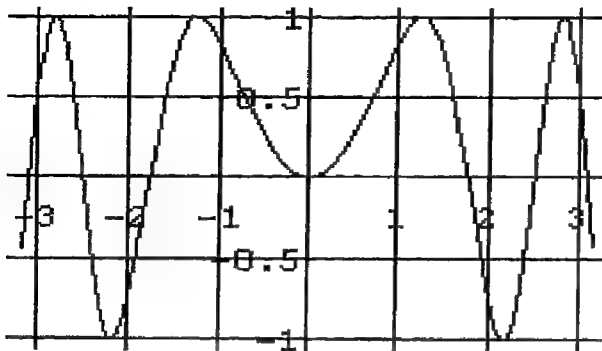
لرسم الدالة  $\sin x^2$   
في الفترة  $[-\pi, \pi]$   
وفي المدى من 0 الى 1  
وكتابة عنوان على الرسم

```
In[13]:= Plot[ Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},Frame->True,
             FrameLabel->"Graph of sin(x^2)" ]
```



رسم الدالة  $\sin x^2$   
في الفترة  $[-\pi, \pi]$   
مع عمل إطار خارجي  
حول الرسم وكتابة  
عنوان على هذا الإطار

```
In[14]:=Plot[ Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},GridLines->Automatic]
```



رسم الدالة  $\sin x^2$   
في الفترة  $[-\pi, \pi]$   
مع عمل خطوط شبكية  
على الرسم

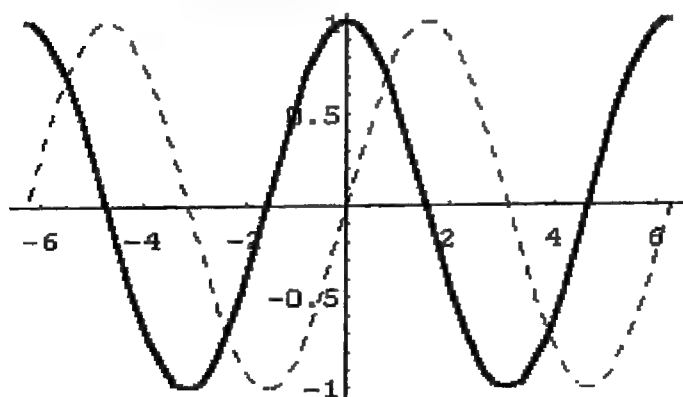
وفي برنامج ماتيماتكا يمكن استخدام الرسوم الأولية في توضيح النقط والخطوط والمنحنيات بأساليب مختلفة **different styles** ويتم ذلك بواسطة الاختيار **PlotStyle** مع الأمر **Plot** وقيمه الفعالة **Automatic** ويمكن إعطاء قيم أخرى للاختيار **PlotStyle** كالآتي :

<b>PlotStyle-&gt;style</b>
تحديد الأسلوب <b>style</b> لرسم جميع المنحنيات للدوال الموجودة بالأمر <b>Plot</b>
<b>PlotStyle-&gt;{{style1},{style2},...}</b>
تحديد الأساليب <b>style1, style2, ...</b> للاستخدام بصورة دورية مع منحنيات الدوال الموجودة في الأمر <b>Plot</b> فمنحنى الدالة الأولى يرسم بالأسلوب <b>style1</b> ومنحنى الدالة الثانية يرسم بالأسلوب <b>style2 ... الخ</b>

ونعرض الآن بعض الأساليب **styles** الموجودة في ماتيماتكا ووظيفة كلا منها .

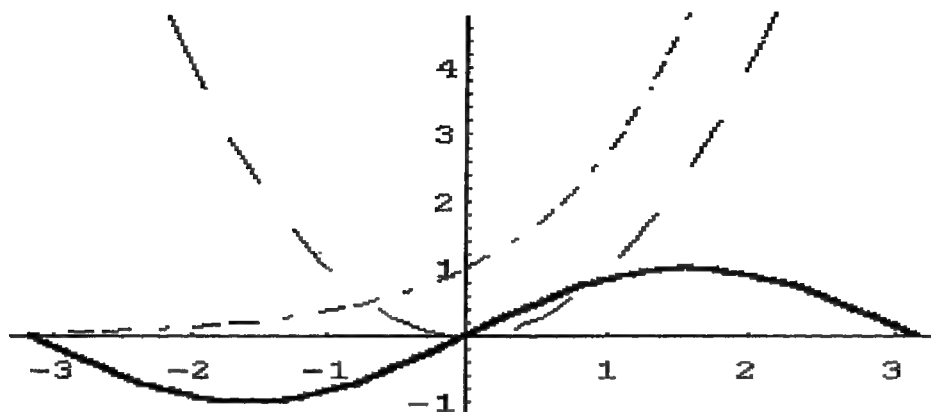
الأسلوب <b>style</b>	الوظيفة
<b>Thickness[x]</b>	رسم المنحنى بحيث يكون سمك الخط المستخدم يساوى <b>x</b> حيث <b>x</b> تمثل كسر من العرض الكلى للرسم فمثلا لجعل الخط كثيف <b>Thickness[0.05]</b>
<b>Dashing[{d}]</b>	رسم المنحنى متقطع بأجزاء متعاقبة طولها <b>d</b> حيث <b>d</b> تمثل كسر من العرض الكلى للرسم ، فمثلا لرسم المنحنى متقطع بالصورة — يكتب <b>Dashing[{0.25}]</b>
<b>Dashing[{d1,d2,d3,...}]</b>	رسم المنحنى متقطع بأجزاء متعاقبة طولها <b>d1,d2,...</b> وبصورة دورية حيث كلا من <b>di</b> يمثل كسر من العرض الكلى للرسم
<b>GrayLevel[x]</b>	رسم المنحنى باللون الرمادى بمستوى تلوين <b>x</b> يتراوح بين 0 و 1 حيث <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div><b>GrayLevel[0]</b></div> <div>لون اسود <b>black</b></div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div><b>GrayLevel[1]</b></div> <div>لون ابيض <b>white</b></div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div><b>GrayLevel[0.5]</b></div> <div>لون رمادى <b>gray</b></div> </div>
<b>RGBColor[r,g,b]</b>	رسم المنحنى ملون حيث <b>r,g,b</b> تمثل الألوان الأحمر <b>red</b> والأخضر <b>green</b> والأزرق <b>blue</b> على الترتيب وكل منها يأخذ قيم بين 0 و 1 وفقا لدرجة اللون المطلوب

```
In[15]:= Plot[{Sin[x],Cos[x]},{x,-2Pi,2Pi},
PlotStyle->{Dashing[{0.02}],Thickness[0.007]]}
```



رسم منحنى الدالتين  
 $\sin x$  ,  $\cos x$   
 على نفس النطاق  
 $[-2\pi, 2\pi]$   
 وبحيث يكون منحنى  
 $\sin x$  متقطع ومنحنى  
 $\cos x$  سميك

```
In[16]:=Plot[{x^2,Sin[x],Exp[x]},{x,-Pi,Pi},PlotStyle->{{Dashing[{0.08}]},
{Thickness[0.007]},{Dashing[{0.01,0.03,0.03]}]}}
```



رسم الدالة  $x^2$  على صورة خطوط متقطعة  
 ورسم الدالة  $\sin x$  بخط سميك  
 ورسم الدالة  $e^x$  على صورة خطوط متقطعة ونقط  
 والدوال الثلاثة مرسومة على نفس النطاق

ويمكن استخدام الرسوم الأولية **graphics primitives** لتحديد شكل محاور الإحداثيات في الرسم الناتج ويتم ذلك باستخدام الاختيار **AxesStyle** مع أمر الرسم **Plot** وقيمته الفعالة **Automatic** ويمكن إعطاء قيم أخرى للاختيار **AxesStyle** كالآتي :

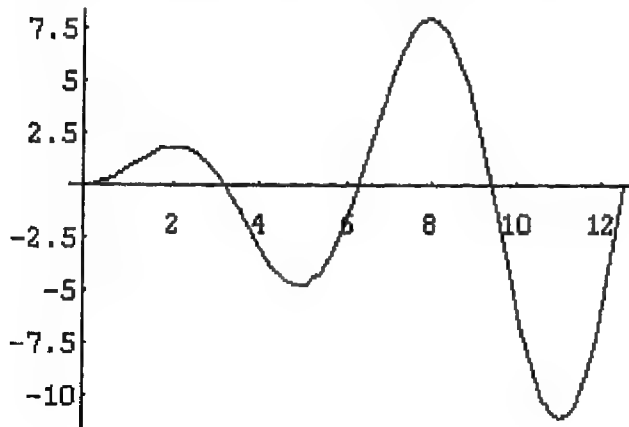
<b>AxesStyle -&gt;style</b>
تحديد الأسلوب <b>style</b> في رسم محاور الإحداثيات
<b>AxesStyle -&gt;{{stylex},{styley}}</b>
تحديد الأسلوب <b>stylex</b> في رسم محور <b>x</b> والأسلوب <b>styley</b> في رسم محور <b>y</b>

ويمكن أيضا استخدام الرسوم الأولية **graphics primitives** لتحديد شكل الإطار المرسوم حول الرسم ويتم ذلك باستخدام الاختيار **FrameStyle** مع أمر الرسم **Plot** وقيمته الفعالة **Automatic** ويمكن إعطاء قيم أخرى للاختيار **FrameStyle** كالآتي :

<b>FrameStyle -&gt;style</b>
تحديد الأسلوب <b>style</b> في رسم الأوجه الأربعة للإطار
<b>FrameStyle -&gt;{{xpstyle},{ypstyle},{ xnstyle},{ynstyle}}</b>
تحديد أربعة أساليب لرسم الأوجه الأربعة للإطار مبتدأ من الوجه الأفقي السفلي ويرسم بالأسلوب <b>xpstylex</b> والأوجه الباقية ترسم بالأساليب الباقية حسب دوران عقارب الساعة

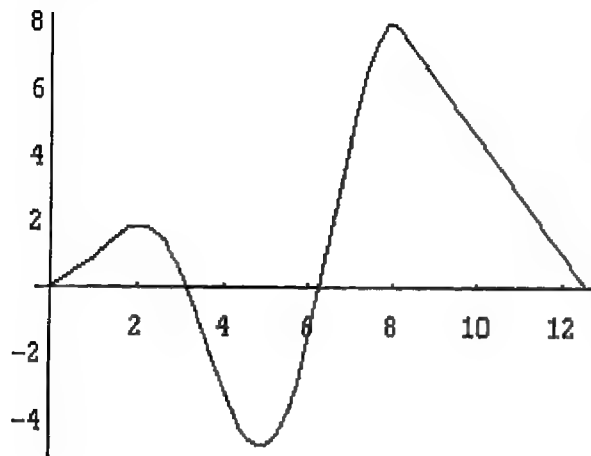
وفي ماتيماتيكاً يقوم الأمر **Plot** في البداية بحساب قيم الدالة عند عينة من النقاط المتساوية البعد ويتم تحديد عدد النقاط في العينة بواسطة الاختيار **PlotPoints** وقيمته الابتدائية الفعالة هي 25 ثم يقوم الأمر **Plot** بعد ذلك بأخذ عينات إضافية من النقاط لعمل منحنى بحيث تكون زاوية الالتواء **bend** بين الأجزاء المتعاقبة على المنحنى اقل من القيمة الابتدائية الفعالة الموجودة في الاختيار **MaxBend** وهي 10 ويتم تقسيم الفترة المعطاة الى فترات جزئية عددها ( على الأكثر ) يساوى القيمة الابتدائية الفعالة الموجودة في الاختيار **PlotDivision** وهي 20 . ويجب مراعاة انه إذا استخدمنا عدد صغير من النقاط في العينة فإن رسم المنحنى قد يبدو غير مكتمل ويمكن التحقق من ذلك عن طريق زيادة عدد نقط العينة في الاختيار **PlotPoints** .

In[17]:= p1=Plot[x Sin[x],{x,0,4Pi},PlotPoints->30]



عند اخذ 30 نقطة في العينة  
في الاختيار PlotPoints  
فإن رسم الدالة  $x \sin x$   
يكون كما هو موضح بالشكل

In[18]:= p2=Plot[x Sin[x],{x,0,4Pi},PlotPoints->4]



عند اخذ 4 نقط فقط في العينة  
في الاختيار PlotPoints  
فإن رسم الدالة  $x \sin x$  يبدو  
غير مكتمل كما هو موضح بالشكل

ويمكن التعرف على المعلومات التي يقوم ماثماتيكاً بحسابها عند تنفيذ أمر **Plot** لرسم الدالة وذلك باستخدام الأمر **InputForm** في الصورة

للتعرف على البيانات التي ينفذها ماثماتيكاً على **expr** **InputForm [ expr ]**

فمثلاً للتعرف على البيانات التي ينفذها ماثماتيكاً على الرسم **p2** في جملة الإدخال السابقة يرسل الأمر

**InputForm [p2]**

وبرنامج ماثماتيكاً يقوم بحفظ المعلومات الخاصة بكل رسم يتم تنفيذه بحيث يمكن إعادة الرسم في أي وقت بعد ذلك مع إمكانية تغيير بعض الاختيارات المستخدمة وذلك للنظر إلى الرسم بطرق مختلفة كما يمكن عرض أكثر من رسم معا ويتم ذلك باستخدام الأمر **Show** كالآتي :

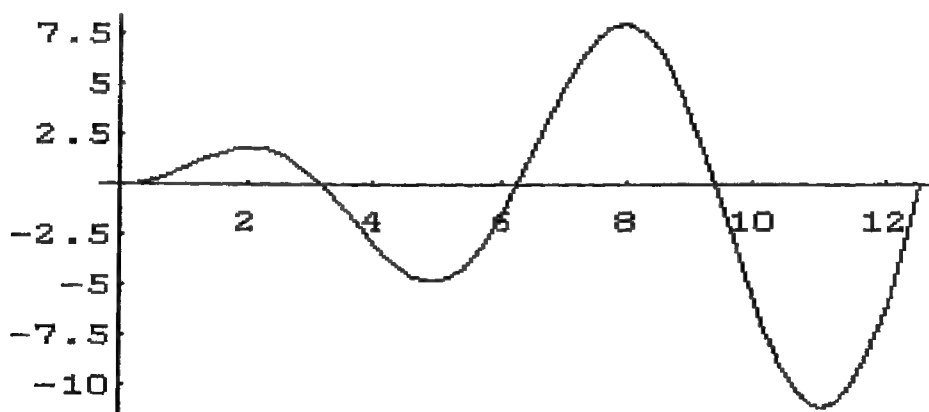
<b>Show[p1]</b>	إعادة عرض الرسم <b>p1</b> الناتج من <b>Plot</b>
<b>Show[p1,option-&gt;value]</b>	إعادة عرض الرسم <b>p1</b> الناتج من <b>Plot</b> مع تنفيذ الاختيار <b>Option -&gt; value</b>
<b>Show[plot1,plot2,...]</b>	إعادة عرض رسم المنحنيات <b>p1,p2,...</b> الناتجة من <b>Plot</b> معا في رسم واحد

وفي أمر إعادة الرسم **Show** يمكن استخدام اختيارات الأمر **Plot** ما عدا الاختيارات التي تغير من طبيعة وعدد النقاط في العينة المستخدمة لرسم الدالة مثل الاختيارات

**PlotStyle , PlotPoints , MaxBand , PlotDivision**

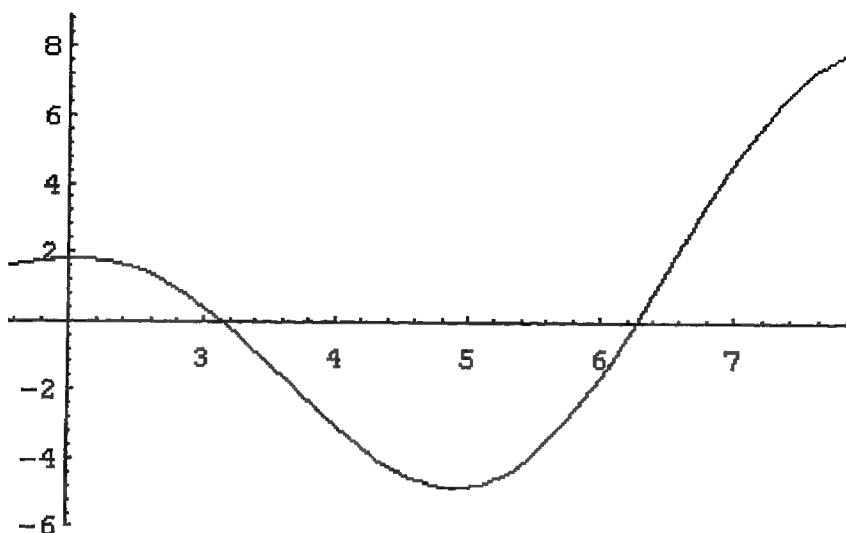
والأمثلة الآتية توضح ذلك .

**In[19]:= p3=Plot[x Sin[x],{x,0,4Pi}]**

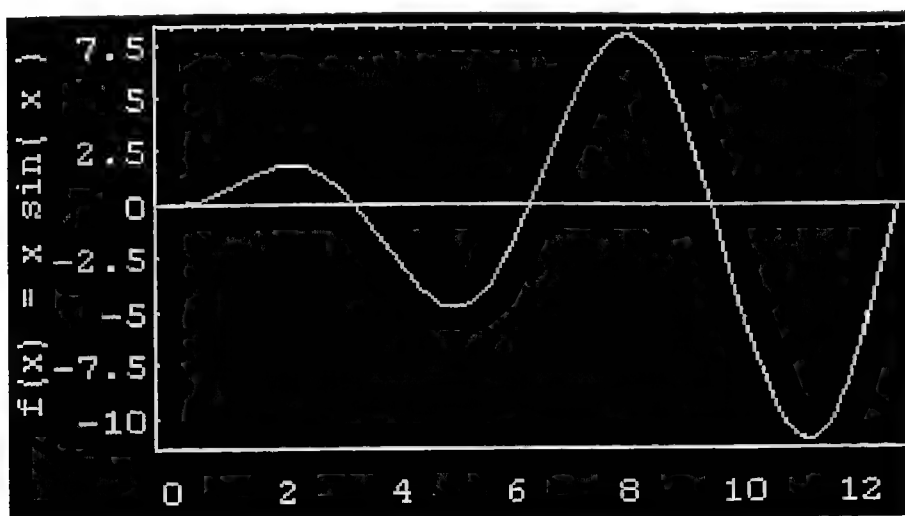


**In[20]:= Show[p3,PlotRange->{{Pi/2,5Pi/2},{-6,9}},  
PlotLabel->"\*\* Small Region of the plot f(x)= x sin(x) \*\*"]**

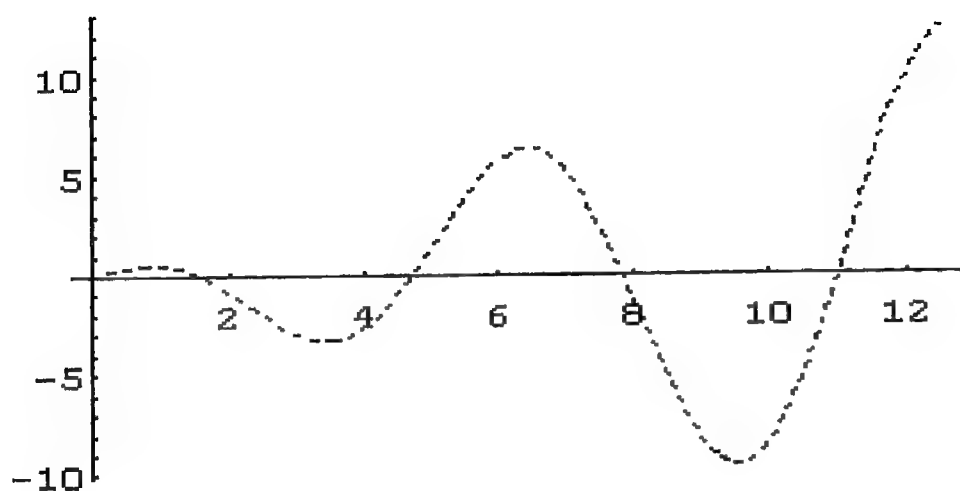
**\*\* Small Region of the plot f(x)= x sin(x) \*\***



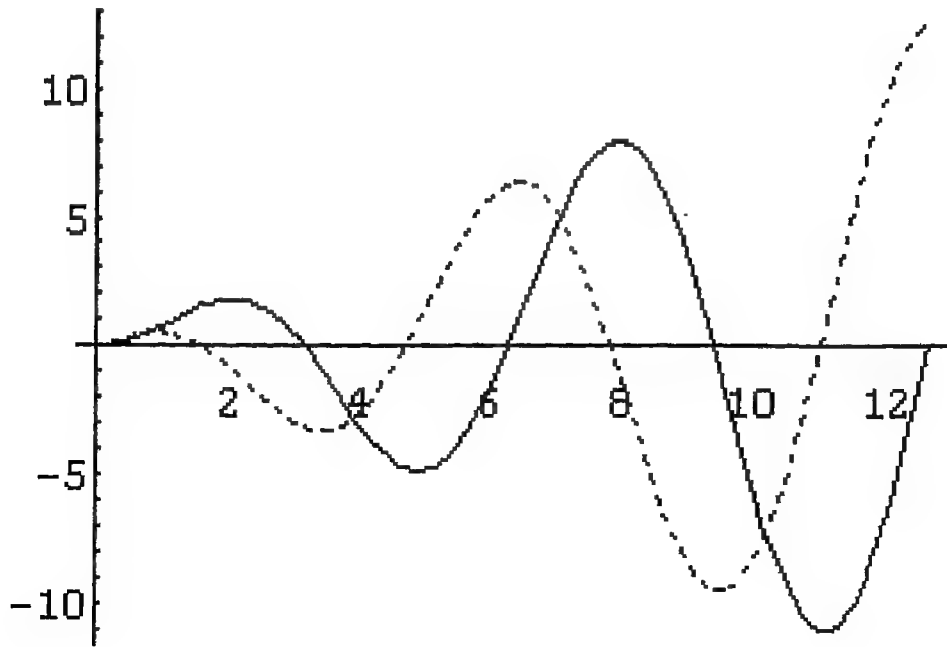
In[21]:= Show[p3,Frame->True,FrameLabel->" f(x) = x sin( x )",  
Background->GrayLevel0]]



In[22]:=p4=Plot[x Cos[x],{x,0,4Pi},PlotStyle->Dashing[{0.01}]]



In[23]:= Show[p3,p4]



وفى برنامج ماتيماتيكا فإن جميع الرسوم الناتجة من الأمر **Plot** يتم تكوينها من قوائم من الرسوم الأولية **graphics primitives** المناسبة والموجودة داخل بناء ماتيماتيكا وبعد ذلك يتم عرضها بالصورة التى نراها

والجدول التالي يوضح بعض الرسوم الأولية الموجودة داخل بناء ماتيماتيكا .

الناتج	الرسوم الأولية Graphics Primitives
رسم نقطة فى المستوى لها الإحداثيات $(x,y)$	<code>Point[{x,y}]</code>
رسم خط مستقيم يمر بالنقطتين $(x_1,y_1)$ , $(x_2,y_2)$	<code>Line[{x1,y1},{x2,y2}]</code>
رسم خط منكسر يمر بالنقط المعطاة على الترتيب	<code>Line[{x1,y1},{x2,y2},{x3,y3},...]</code>
رسم مستطيل إحداثيات رؤوسه على أحد القطرين هي $(xmin,ymin)$ , $(xmax,ymax)$	<code>Rectangle[{xmin,ymin},{xmax,ymax}]</code>
رسم شكل كثير الأضلاع له الرؤوس المعطاة	<code>Polygon[{x1,y1},{x2,y2},...]</code>
رسم دائرة مركزها النقطة $(h,k)$ ونصف قطرها $r$	<code>Circle[{h,k},r]</code>
رسم قطع ناقص مركزه النقطة $(h,k)$ وطول الجزء المقطوع من محور $x$ يساوى $rx$ وطول الجزء المقطوع من محور $y$ يساوى $ry$	<code>Circle[{h,k},{rx,ry}]</code>
رسم قطاع من دائرة مركزها النقطة $(h,k)$ ونصف قطرها $r$ والقطاع يمتد من الزاوية $t_1$ الى الزاوية $t_2$ حيث الزوايا مقاسه بالتقدير الدائرى واتجاهها ضد دوران عقرب الساعة	<code>Circle[{h,k},r,{t1,t2}]</code>

الرسوم الأولية Graphics Primitives	الناتج
$\text{Disk}[\{h,k\},r]$	رسم قرص دائري ممتلئ مركزه النقطة $(h,k)$ ونصف قطره $r$
$\text{Disk}[\{h,k\},\{rx,ry\}]$	رسم قرص ممتلئ على هيئة قطع ناقص مركزه النقطة $(h,k)$ وطول الجزء المقطوع من محور $x$ يساوي $rx$ وطول الجزء المقطوع من محور $y$ يساوي $ry$
$\text{Disk}[\{h,k\},r,\{t1,t2\}]$	رسم قطاع من قرص دائري ممتلئ مركزه النقطة $(h,k)$ ونصف قطره $r$ والقطاع يمتد من الزاوية $t1$ الى الزاوية $t2$ حيث الزوايا مقاسه بالتقدير الدائري واتجاهها ضد دوران عقرب الساعة
$\text{Text}[\text{expr},\{x,y\}]$	كتابة النص $\text{expr}$ متمركزا عند النقطة $(x,y)$
$\text{GrayLevel}[i]$	عرض الأشياء التالية له باللون الرمادي بمستوى تلوين $i$ يتراوح بين 0 , 1
$\text{RGBColor}[r,g,b]$	عرض الأشياء التالية له ملونة بمستوى تلوين يتراوح بين 0 , 1 للون الأحمر $r$ والأخضر $g$ والأزرق $b$
$\text{PointSize}[s]$	رسم النقطة التالية في الأمر $\text{Plot}$ كمناطق دائرية نصف قطرها $s$ حيث $s$ تمثل كسر من العرض الكلي للرسم
$\text{Thickness}[t]$	رسم الخطوط بسمك $t$ حيث $t$ تمثل كسر من العرض الكلي للرسم
$\text{Dashing}[\{d1,d2,...\}]$	رسم الخطوط على صورة أجزاء متقطعة أطوالها $d1,d2,...$ على التتابع حيث $d_i$ تمثل كسر من العرض الكلي للرسم

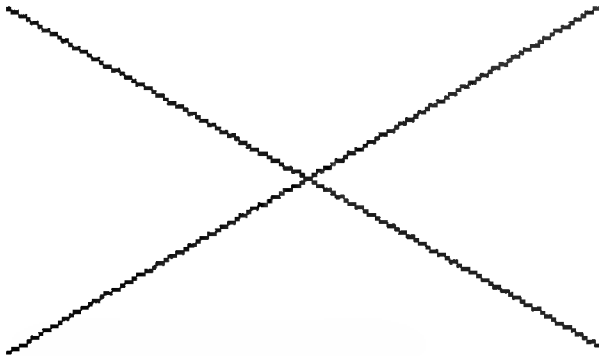
ويمكن للمستخدم التعامل مباشرة مع الرسوم الأولية باستخدام الأمر Graphics كالآتي :

**Graphics[primitives,options]**

**Graphics[{primitive1,primitive2,...}]**

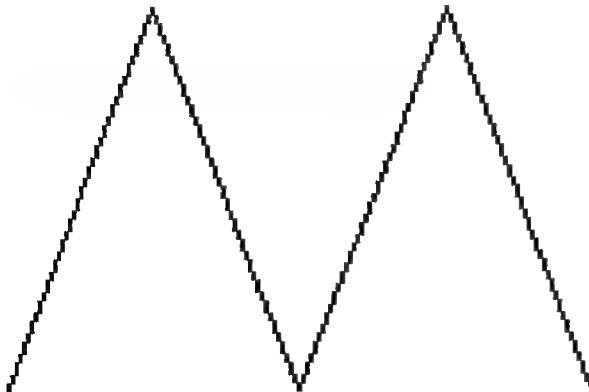
ونائج تنفيذ الأمر Graphics يكون رسالة على الصورة - Graphics - بدون ظهور الرسم ويتم إظهار الرسم باستخدام الأمر Show .

**In[24]:= g1=Graphics[{Line[{{-1,-1},{1,1}},Line[{{-1,1},{1,-1}}]}; Show[g1]**



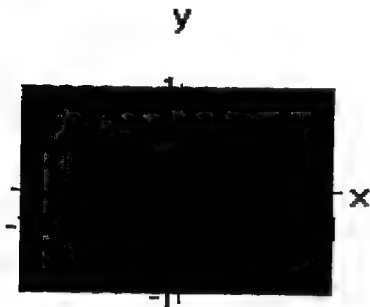
استخدام الأمر Graphics  
في رسم خط مستقيم يصل بين  
النقطتين  $(1,1)$  و  $(-1,-1)$   
رسم مستقيم يصل بين النقطتين  
 $(1,-1)$  و  $(-1,1)$  ثم إظهار  
الرسم باستخدام الأمر Show

**In[25]:= g2=Graphics[Line[{{0,0},{1,1},{2,0},{3,1},{4,0}}]];Show[g2]**



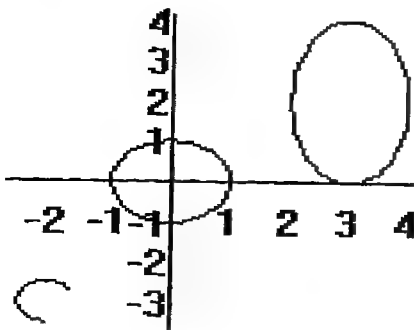
استخدام الأمر Graphics  
في رسم خطوط منكسرة تصل  
النقط المعطاة  
 $(0,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(2,0)$ ,  $(3,1)$ ,  $(4,0)$   
على الترتيب ثم إظهار الرسم  
باستخدام الأمر Show

```
In[26]:= g3=Show[Graphics[Rectangle[{-1,-1},{1,1}]],
  Axes->True,AxesLabel->{"x","y"}]
```



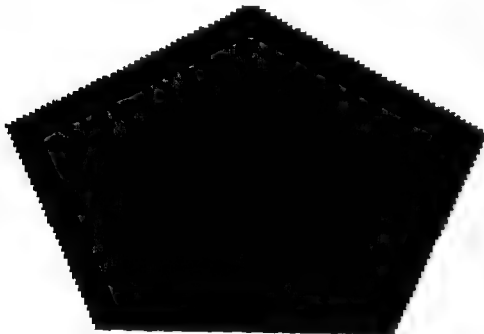
رسم مستطيل إحداثيات رؤوس  
قطر فيه هي  $(-1,-1)$  ,  $(1,1)$   
وتم إضافة اختيار عمل محاور  
وكتابة العنوان x على المحور  
الأفقي والعنوان y على الراسي

```
In[27]:= one=Graphics[Circle[{0,0},1]];two=Graphics[Circle[{3,2},{1,2}]];
three=Graphics[Circle[{-2,-3},.5,{Pi/4,3Pi/2}]];
Show[one,two,three,Axes->True,AspectRatio->1]
```



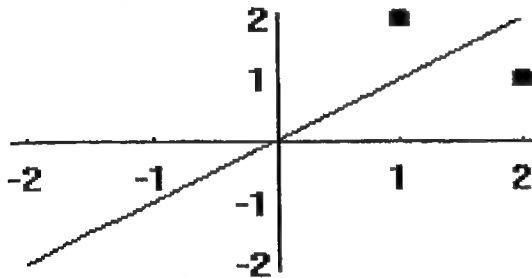
رسم دائرة مركزها النقطة  $(0,0)$  ونصف قطرها 1  
وقطع ناقص مركزه النقطة  $(3,2)$   
وقطاع من دائرة مركزها النقطة  $(-2,-3)$  وممتد  
من الزاوية  $Pi/4$  الى الزاوية  $3Pi/2$   
ثم إظهار الرسوم الثلاثة معا باستخدام الأمر Show

```
In[28]:= pentagon=Table[N[{Sin[2 n Pi/5],Cos[2 n Pi/5]}],{n,5}];
Show[Graphics[Polygon[pentagon]]]
```



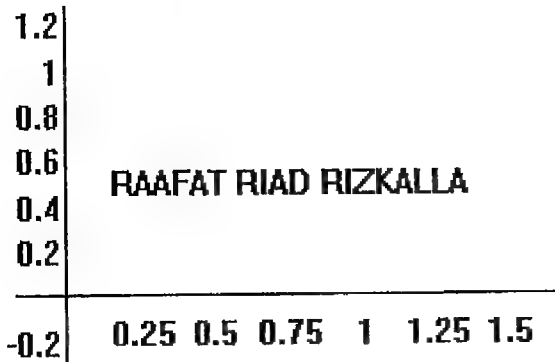
عمل قائمة pentagon تحتوى على  
إحداثيات الشكل الخماسي ثم إظهار  
الرسم باستخدام الأمر Show

```
In[29]:= Show[Graphics[{Line[{{-2,-2},{2,2}},PointSize[0.03],
Point[{2,1}],Point[{1,2}}],Axes->True]
```



إظهار رسم الخط المستقيم الواصل بين  
النقطتين  $(-2,-2)$  و  $(2,2)$  مع رسم  
نقط بالحجم 0.03 عند الإحداثيات  
 $(2,1)$  و  $(1,2)$

```
In[30]:= text1=Graphics[Text[RAAFAT RIAD RIZKALLA, {0.75,0.5}]];
Show[text1,Axes->True]
```



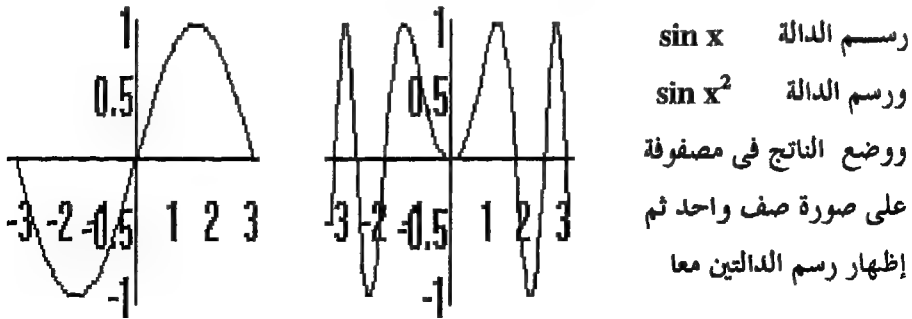
كتابة النص  
RAAFAT RIAD RIZKALLA  
متمركزا عند النقطة  $(0.75,0.5)$

وفي ماتيماتيكا يمكن تكوين مصفوفة من أي بعد عناصرها أشكال مرسومة وذلك باستخدام الأمر  
**GraphicsArray** كالآتي :

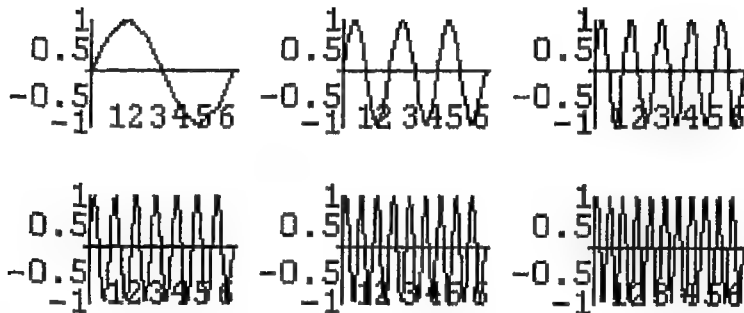
<b>GraphicsArray[{graph1,graph2,...}]</b>	
عمل صف من الأشكال المرسومة graph1,graph2,...	
<b>GraphicsArray[{graph11,graph12,...}, {graph21,graph22,...},...]</b>	
عمل مصفوفة من الأشكال المرسومة	
graph11,graph12,...	الصف الأول به الرسوم
graph21,graph22,...	والصف الثاني به الرسوم

والأشكال المرسومة داخل المصفوفة GraphicsArray يتم عرضها بواسطة الأمر Show حيث تظهر الرسوم في مناطق مستطيلة مرتبة في صفوف ومع الأمر GraphicsArray يمكن إضافة اختيارات الأمر Plot بالإضافة الى الاختيار GraphicsSpacing وقيمته الفعالة 0.1 وهو يستخدم للتحكم في الفراغ بين مناطق الرسم المستطيلة المرسوم داخلها عناصر المصفوفة .

```
In[31]:= p1one=Plot[Sin[x],{x,-Pi,Pi},DisplayFunction->Identity];
p2two=Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},DisplayFunction->Identity];
Show[GraphicsArray[{p1one,p2two}]]
```



```
In[32]:= psin[n_]:=Plot[Sin[n x],{x,0,2Pi},DisplayFunction->Identity];
a=Partition[Table[psin[n],{n,1,11,2}],3];
Show[GraphicsArray[a]]
```



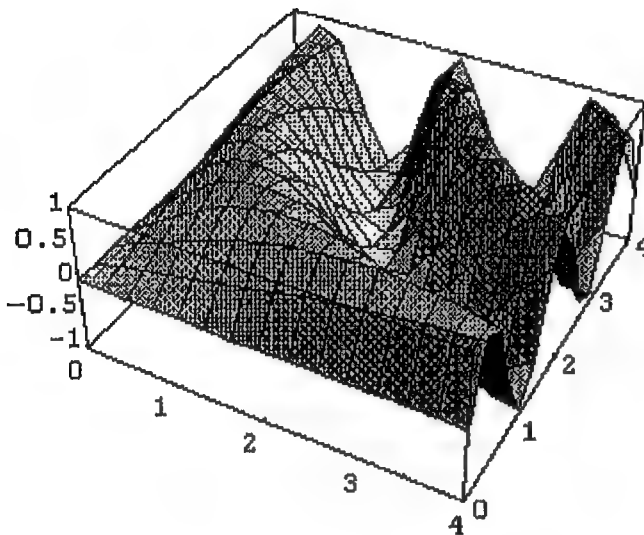
رسم الدالة  $\sin(nx)$  في النطاق  $[0, 2\pi]$  وذلك لقيم  $n = 1, 3, 5, 7, 9, 11$  ثم وضع الرسوم في مصفوفة وعرضها في صفين بحيث يحتوى كل صف على ثلاثة رسوم

## ٢. رسم الدوال في الفراغ Three-Dimensional Plotting

الدالة في متغيرين يرمز لها  $z=f(x,y)$  حيث  $x,y$  متغيرات مستقلة،  $z$  متغير تابع ونطاق الدالة  $f(x,y)$  يقع في المستوى  $xy$  ويمثله مجموعة النقط  $(x,y)$  المعروف عندها الدالة بينما مدى الدالة  $f(x,y)$  يقع على محور  $z$  في الفراغ ورسم الدالة  $z = f(x,y)$  هو عبارة عن سطح في الفراغ يمثله مجموعة النقط  $(x,y,z)$  التي تحقق المعادلة  $z = f(x,y)$  وفي ماثميكا يمكن رسم الدوال في الفراغ باستخدام الأمر `Plot3D` كالآتي :

`Plot3D[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]`

`In[1]:=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4}]`



رسم الدالة

$\sin(x y)$

على المنطقة المستطيلة الشكل

$0 \leq x \leq 4$  ،  $0 \leq y \leq 4$

وكما فى حالة الأمر **Plot** للرسم فى المستوى فإنه يوجد العديد من الاختيارات التى تتحكم فى شكل الرسم فى الفراغ ويمكن الاستعلام عن الاختيارات الفعالة للأمر **Plot3D** باستخدام الأمر **Options** كالتالى :

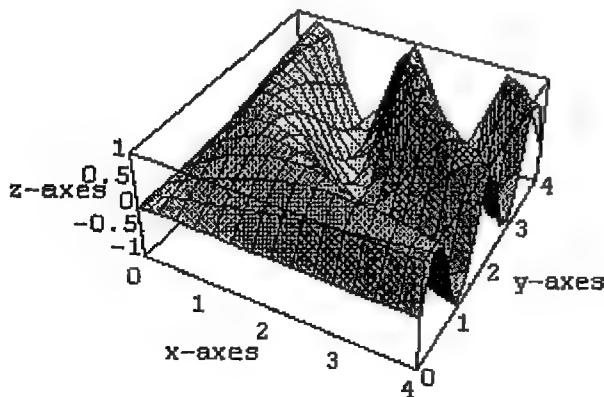
**In[2]:=Options[Plot3D]**

```
{AmbientLight -> GrayLevel[0], AspectRatio -> Automatic, Axes ->
True, AxesEdge -> Automatic, AxesLabel -> None, AxesStyle ->
Automatic, Background -> Automatic, Boxed -> True, BoxRatios -> {1,
1, 0.4}, BoxStyle -> Automatic, ClipFill -> Automatic, ColorFunction
-> Automatic, ColorOutput -> Automatic, Compiled -> True,
DefaultColor -> Automatic, Epilog -> {}, FaceGrids -> None,
HiddenSurface -> True, Lighting -> True, LightSources -> {{1., 0.,
1.}, RGBColor[1, 0, 0]}, {{1., 1., 1.}, RGBColor[0, 1, 0]}, {{0., 1., 1.},
RGBColor[0, 0, 1]}}, Mesh -> True, MeshStyle -> Automatic, PlotLabel
-> None, PlotPoints -> 15, PlotRange -> Automatic, PlotRegion ->
Automatic, Plot3Matrix -> Automatic, Prolog -> {}, Shading -> True,
SphericalRegion -> False, Ticks -> Automatic, ViewCenter ->
Automatic, ViewPoint -> {1.3, -2.4, 2.}, ViewVertical -> {0., 0., 1.},
DefaultFont -> $DefaultFont, DisplayFunction -> $DisplayFunction}
```

والآن نعرض بالتفصيل بعض الاختيارات المستخدمة مع الأمر **Plot3D** والقيمة الفعالة لكل منها بالإضافة الى قيم أخرى بديلة للتحكم فى مواصفات الرسم فى الفراغ وهذه الاختيارات يمكن استخدامها أيضا مع أمر إعادة الرسم **Show** .

Option Name اسم الاختيار Default value قيمته الفعالة	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار
Axes->True	رسم محاور الإحداثيات $x, y, z$	Axes->False
AxesLabel->None	كتابة عناوين على المحاور	AxesLabel->"z-label" -AxesLabel >{"x","y","z"}
PlotLabel->None	كتابة عنوان على الرسم	PlotLabel->"any label"
PlotPoints->15	عدد نقط العينة في الاتجاهين $x, y$ والتي يتم عندها حساب قيم الدالة وهذا الاختيار لا يستخدم مع الأمر Show	PlotPoints->n PlotPoints->{nx,ny}
PlotRange->Automatic	مدى الإحداثيات المستخدمة في الرسم	PlotRange->{zmin,zmax} PlotRange->{{xn,xx}, {yn,yx},{zn,zx}} PlotRange->All
Ticks->Automatic	ترقيم محاور الإحداثيات	Ticks->None Ticks->{xt,yt,zt} حيث $xt, yt, zt$ يمكن أن تأخذ القيم Automatic أو None

```
In[3]:=rp1=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4},
  AxesLabel->{"x-axes","y-axes","z-axes"}]
```



استخدام المتغير rp1 كمتخزن

لرسم الدالة

$\sin(xy)$

على المنطقة المستطيلة الشكل

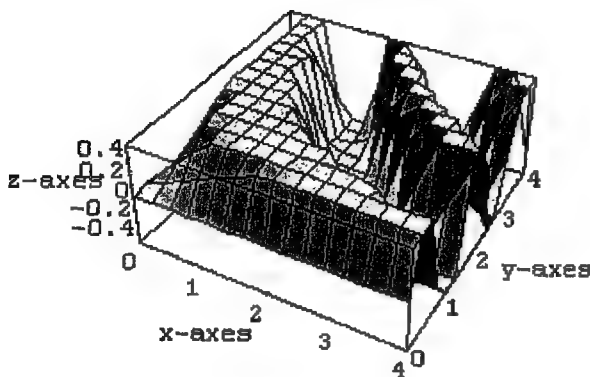
$0 \leq x \leq 4$  ,  $0 \leq y \leq 4$

مع كتابة العناوين

x-axes , y-axes , z-axes

على محاور الإحداثيات

```
In[4]:=rp2=Show[rp1,PlotRange->{-0.5,0.5}]
```



استخدام المتغير rp2 كمتخزن

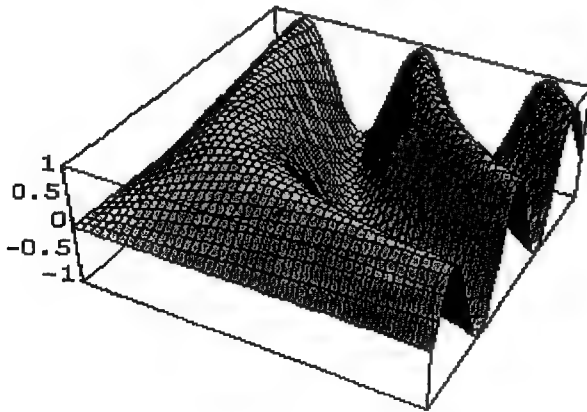
يوضع داخله أمر إعادة الرسم

Show للشكل السابق rp1

مع تغيير مدى الرسم بالاختيار

PlotRange->{-0.5,0.5}

```
In[5]:=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4},PlotPoints->40,
        Ticks->{None,None,Automatic}]
```



رسم الدالة

$\sin(xy)$

على المنطقة المستطيلة الشكل

$0 \leq x \leq 4$  ,  $0 \leq y \leq 4$

مع استخدام الاختيار

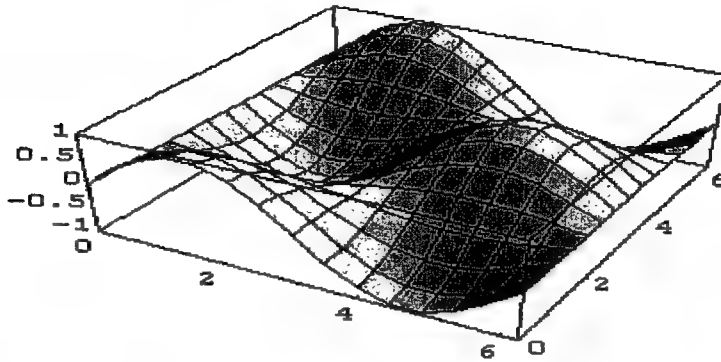
$\text{PlotPoints} \rightarrow 40$

وترقيم محاور الإحداثيات z فقط

والأشكال الناتجة من الأمر **Plot3D** يمكن النظر إليها على أنها صور فوتوغرافية للسطوح وتوجد بعض الاختيارات مع الأوامر **Plot3D, Show** يمكن من خلالها فحص السطوح من مواضع مختلفة ومن أهم هذه الاختيارات هو الاختيار **ViewPoint** لتحديد إحداثيات النقطة في الفراغ التي يتم وضع آلة التصوير عندها لالتقاط صور للسطح وبالتالي يمكن التعرف على الملامح المختلفة للسطح عن طريق وضع الكاميرا في أماكن مختلفة ، ويقوم ماتيماتيكا بوضع السطح داخل صندوق باستخدام الاختيار **Boxed** وأبعاد هذا الصندوق يمكن التحكم فيها بواسطة الاختيار **BoxRatios** .

Option Name اسم الاختيار Default value قيمته الفعالة	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار
ViewPoint->{1.3,-2.4,2}	تحديد إحداثيات نقطة في الفراغ يتم النظر من عندها الى السطح وهذه الإحداثيات تكون بالنسبة الى مركز الصندوق	ViewPoint->{xv,yv,zv} تحديد أي نقطة (xv,yv,zv) في الفراغ
Boxed->True	رسم صندوق حول السطح	Boxed->False
BoxRatios->{1,1,0.4}	تحديد النسبة بين أطوال اوجه الصندوق في اتجاه المحاور x,y,z على الترتيب	BoxRatios->{nx,ny,nz} جعل النسبة nx:ny:nz بين أطوال اوجه الصندوق

In[6]:=rp3=Plot3D[Sin[x] Cos[y],{x,0,2Pi},{y,0,2P}]

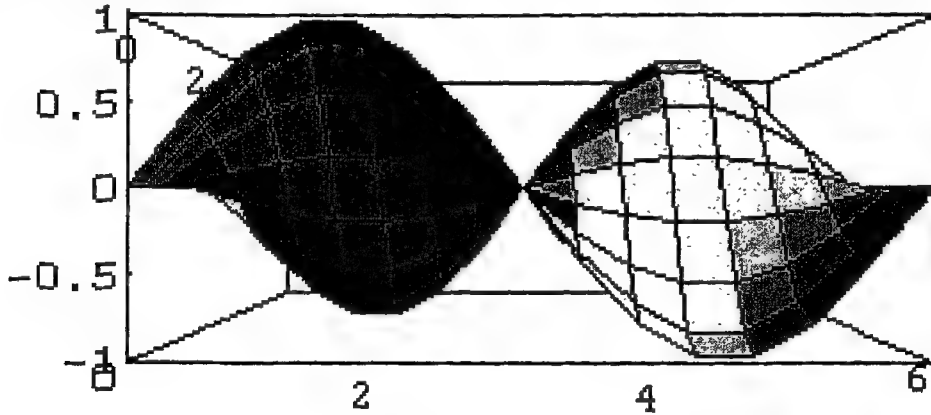


استخدام المتغير rp3 كمخزن لرسم سطح الدالة  $\sin(x) \cos(y)$  في النطاق

$$0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 2\pi$$

حيث يتم النظر الى السطح من آلة تصوير تم وضعها عند الإحداثيات الفعالة (1.3, -2.4, 2)

**In[7]:=Plot3D[Sin[x] Cos[y],{x,0,2Pi},{y,0,2Pi},ViewPoint->{0,-2,0}]**

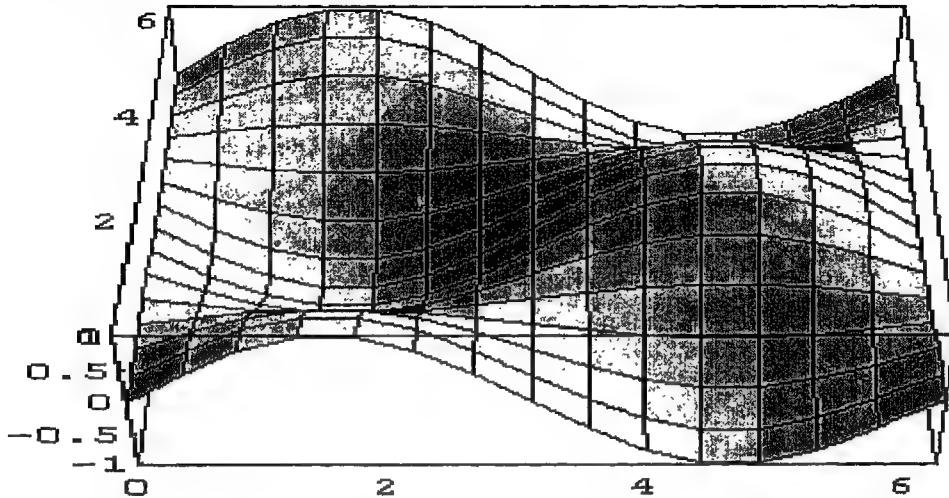


رسم سطح الدالة  $\sin(x) \cos(y)$  في النطاق

$$0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 2\pi$$

حيث يتم النظر الى السطح من آلة تصوير تم وضعها عند الإحداثيات (0, -2, 0)

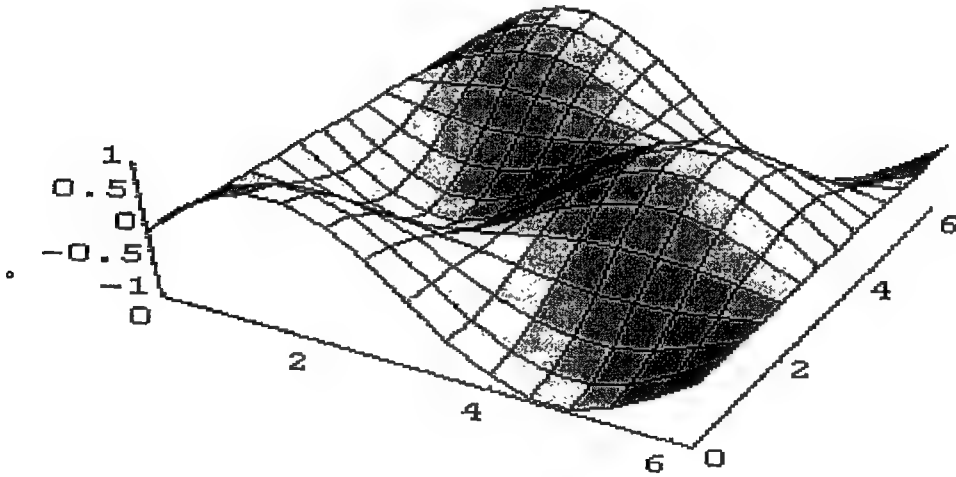
**In[8]:=Show[rp3,ViewPoint->{0,-4,4}]**



استخدام الأمر Show في إعادة الرسم المخزون في المتغير rp3 حيث يتم تغيير موضع

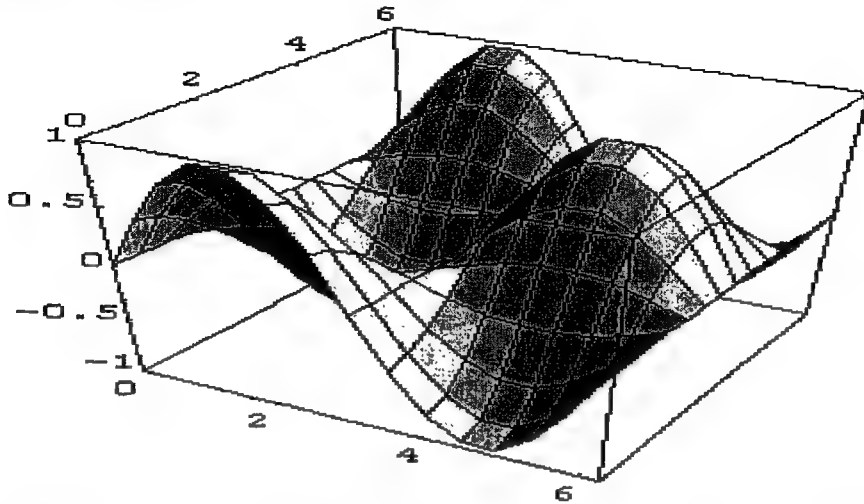
آلة التصوير الى الإحداثيات (0, -4, 4)

**In[9]:=Show[rp3,Boxed->False]**



استخدام الأمر **Show** في إعادة الرسم المخزون في المتغير **rp3** حيث يتم عرض السطح فقط وبدون رسم صندوق من حوله وذلك عن طريق الاختيار **Boxed->False**

**In[10]:=Show[rp3,BoxRatios->{1,1,1}]**

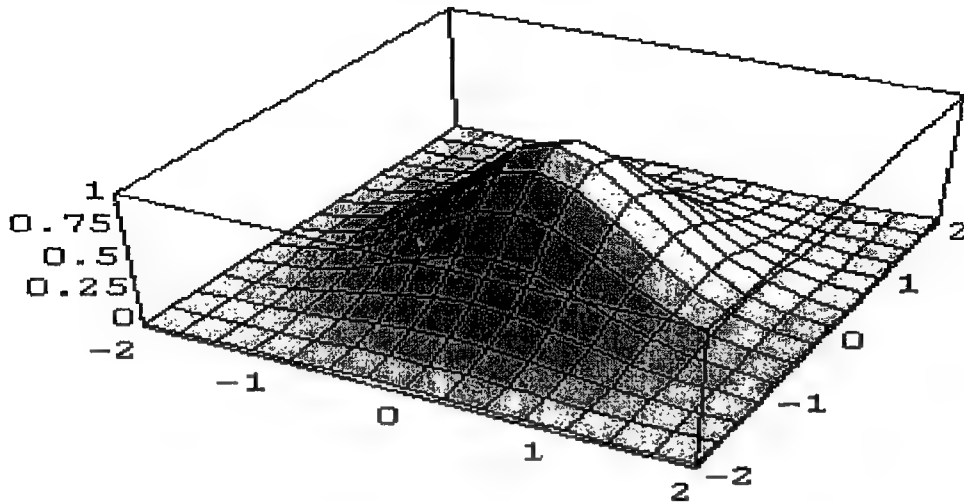


استخدام الأمر **Show** في إعادة الرسم المخزون في المتغير **rp3** حيث يتم عرض السطح داخل صندوق مكعب الشكل وذلك عن طريق الاختيار **BoxRatios->{1,1,1}**

وعند رسم السطوح في الفراغ يمكن التحكم في الأجزاء المخفية من السطح باستخدام الاختيار **HiddenSurface** كما يمكن عمل ظلال للسطح باستخدام الاختيار **Shading** أو عمل شبكة على السطح في اتجاه المحاور  $x, y$  وذلك باستخدام الاختيار **Mesh**

Option Name اسم الاختيار	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار
Default value وقيمة الفعالة		
<b>HiddenSurface-&gt;True</b>	منع ظهور الأجزاء المخفية من السطح	<b>HiddenSurface-&gt;False</b>
<b>Shading-&gt;True</b>	عمل ظلال للسطح	<b>Shading-&gt;False</b>
<b>Mesh-&gt;True</b>	رسم شبكة على السطح في اتجاه المحاور $x, y$	<b>Mesh-&gt;False</b>

**In[11]:=rp4=Plot3D[Exp[-x^2-y^2],{x,-2,2},{y,-2,2}]**

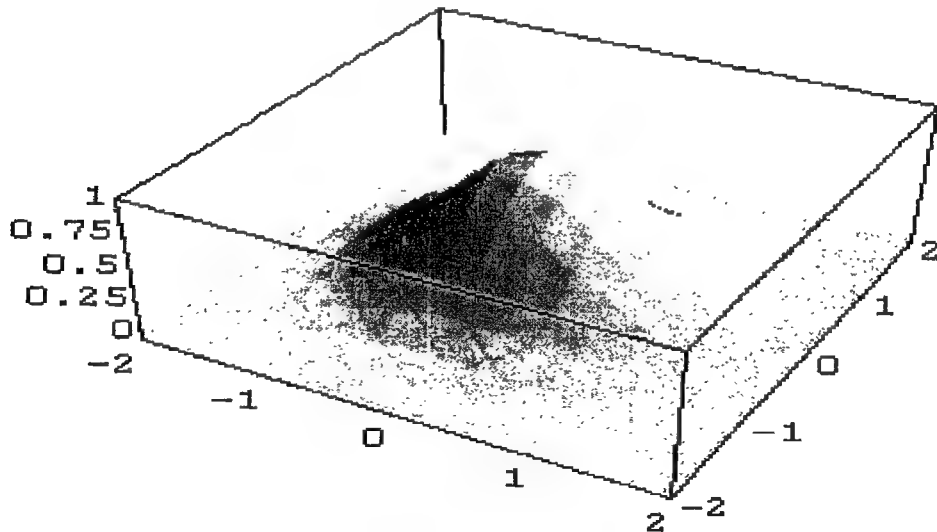


رسم سطح الدالة  $e^{-x^2 - y^2}$  في النطاق

$$-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2$$

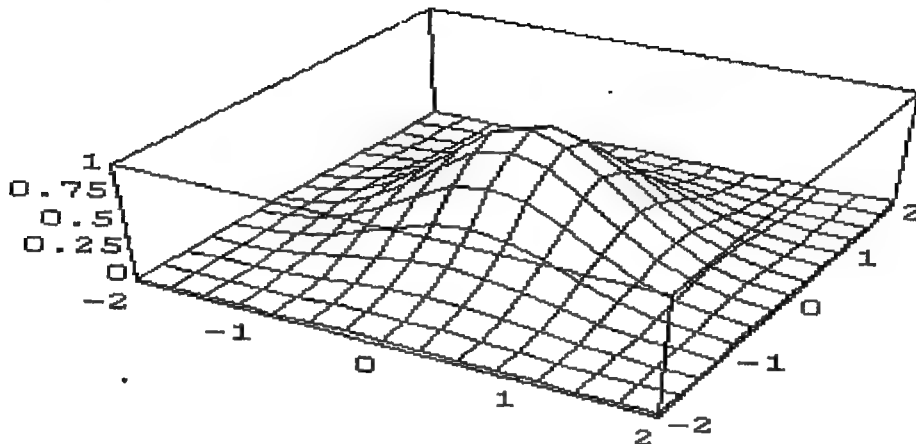
ونلاحظ وجود شبكة على السطح في اتجاه المحاور وذلك نتيجة الاختيار الفعال **Mesh->True**

In[12]:=Show[rp4,Mesh->False]



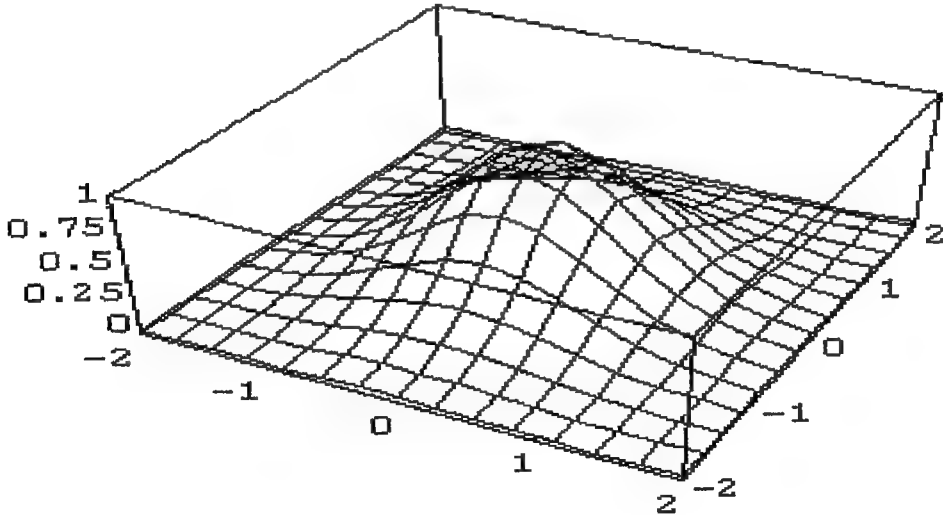
استخدام الأمر Show في إعادة الرسم المخزون في المتغير rp4 حيث يتم العرض بدون رسم شبكة على السطح في اتجاه الخاور وذلك نتيجة الاختيار Mesh->False

In[13]:=Show[rp4,Shading->False]



استخدام الأمر Show في إعادة الرسم المخزون في المتغير rp4 حيث يتم العرض بدون تظليل السطح وذلك نتيجة الاختيار Shading->False

**In[14]:=Show[rp4,HiddenSurface->False]**

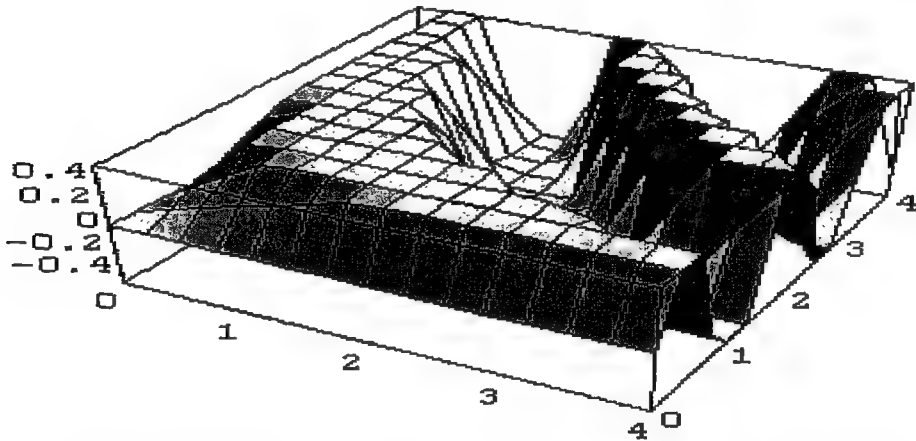


استخدام الأمر **Show** في إعادة الرسم المخزون في المتغير **rp4** حيث يتم إظهار الأجزاء المخفية من السطح وذلك نتيجة الاختيار **HiddenSurface->False**

وعند رسم السطوح في الفراغ يقوم ماتيماتيكا بقطع أجزاء السطح الخارجة عن الصندوق ويمكن توضيح الأماكن التي تم فيها قطع السطح باستخدام الاختيار **ClipFill** كالآتي :

Option Name اسم الاختيار Default value قيمته الفعالة	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار
<b>ClipFill-&gt;Automatic</b>	توضيح الأماكن التي تم عندها قطع السطح وفقا للمواصفات الفعالة للرسم	<b>ClipFill-&gt;None</b> <b>ClipFill-&gt;GrayLevel[i]</b> <b>ClipFill-&gt;RGBColor[r,g,b]</b> <b>ClipFill-&gt;{bootom,top}</b>

In[15]:= rp5=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4},PlotRange->{-0.5,0.5}]

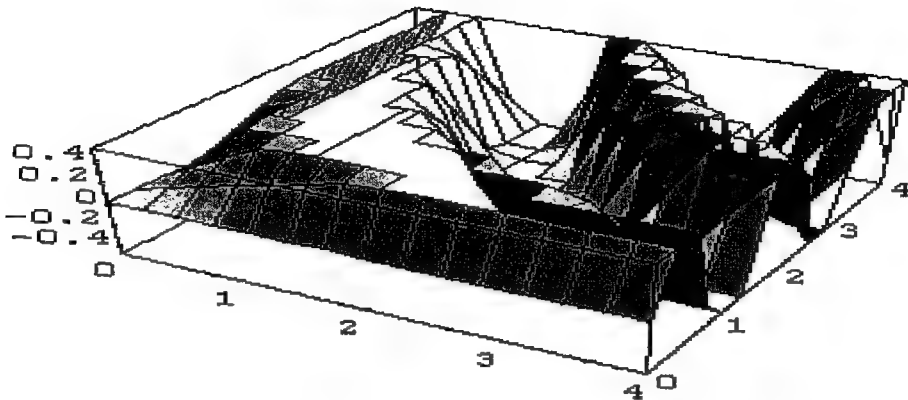


استخدام المتغير rp5 كمخزن لرسم الدالة Sin(x y) على المنطقة المستطيلة الشكل

$$0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 4$$

مع تغيير مدى الرسم بالاختيار PlotRange->{-0.5,0.5}

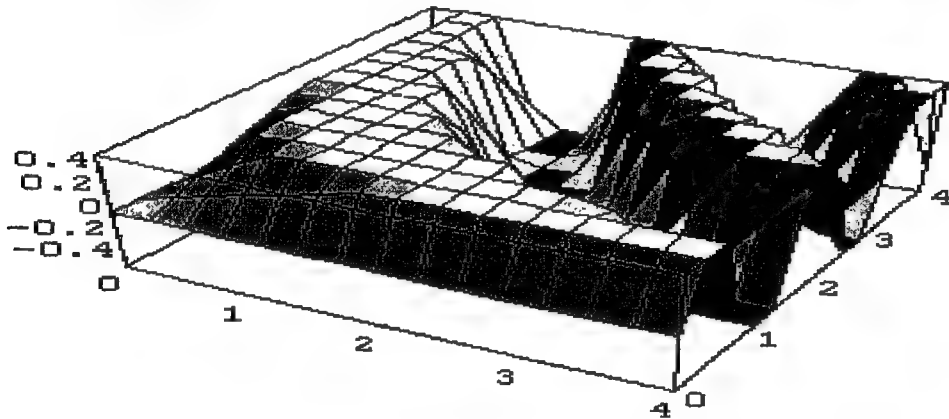
In[16]:= Show[rp5,ClipFill->None]



استخدام الأمر Show في إعادة الرسم المخزون في المتغير rp5 حيث يتم عرض السطح بحيث تترك الأجزاء المقطوعة من السطح واضحة بدون تظليل وذلك

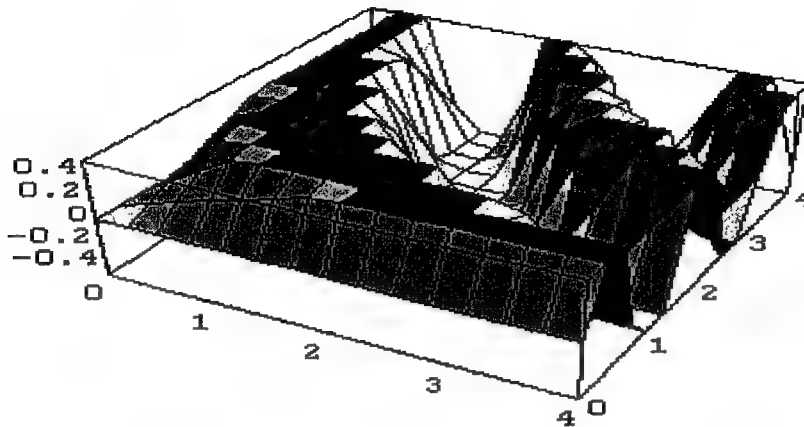
نتيجة الاختيار ClipFill->None

**In[17]:= Show[rp5,ClipFill->{GrayLevel[0],GrayLevel[1]}]**



استخدام الأمر Show في إعادة الرسم المخزون في المتغير rp5 حيث يتم عرض السطح بحيث تظهر الأجزاء المقطوعة للسطح من اسفل باللون الأسود ومن أعلى باللون الأبيض وذلك نتيجة الاختيار ClipFill->{GrayLevel[0],GrayLevel[1]}

**In[18]:=Show[rp5,ClipFill->{GrayLevel[1],GrayLevel[0]}]**

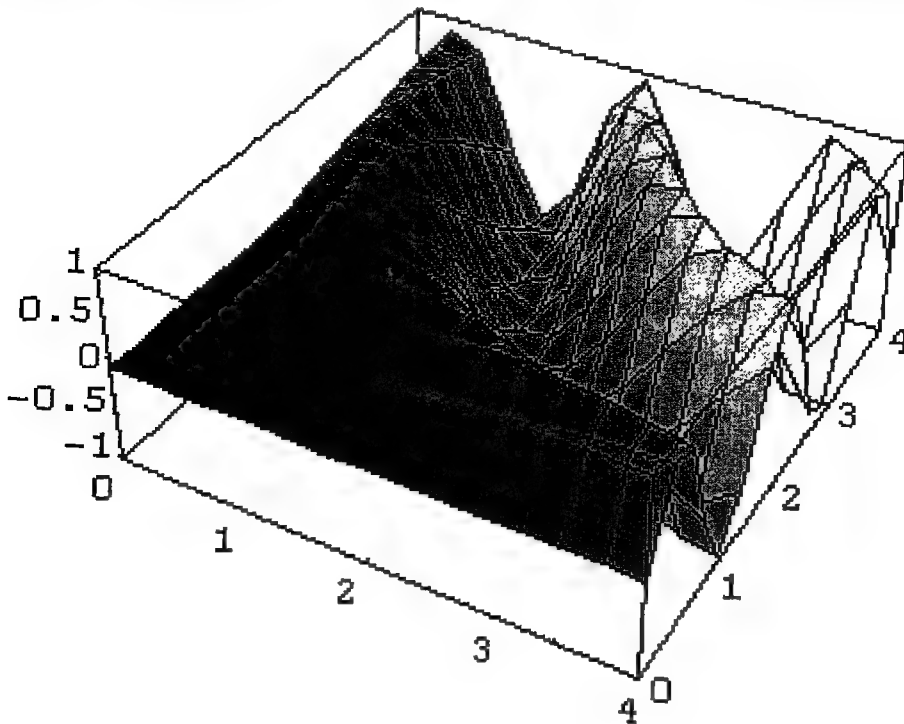


استخدام الأمر Show في إعادة الرسم المخزون في المتغير rp5 حيث يتم عرض السطح بحيث تظهر الأجزاء المقطوعة للسطح من اسفل باللون الأبيض ومن أعلى باللون الأسود وذلك نتيجة الاختيار ClipFill->{GrayLevel[1],GrayLevel[0]}

ويستطيع ماتيماتيكا تظليل كل جزء من سطح الدالة وفقا لموصفات معينة وذلك باستخدام الأمر Plot3D في الصورة الآتية :

**Plot3D[{f(x,y),s},{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}]**  
 رسم سطح الدالة  $f(x,y)$  مع تظليل السطح وفقا للدالة  $s$

**In[19]:=Plot3D[{Sin[x y],GrayLevel[(x+y)/8]},{x,0,4},{y,0,4}]**

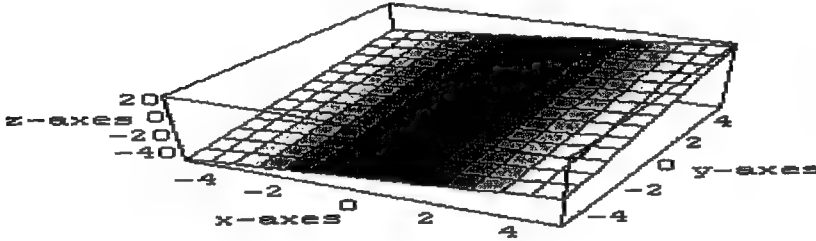


رسم الدالة  $\sin(xy)$  على المنطقة المستطيلة الشكل

$$0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 4$$

وبحيث يتم تظليل سطح الدالة وفقا للدالة  $\text{GrayLevel}[(x+y)/8]$  حيث تتغير قيم  $x, y$  على المنطقة المعطاة ونلاحظ في الرسم تدرج التظليل للسطح

```
In[20]:=Plot3D[{3x+4y-9,GrayLevel[Abs[x]/5]},{x,-5,5},{y,-5,5},
  AxesLabel->{"x-axes","y-axes","z-axes"}]
```

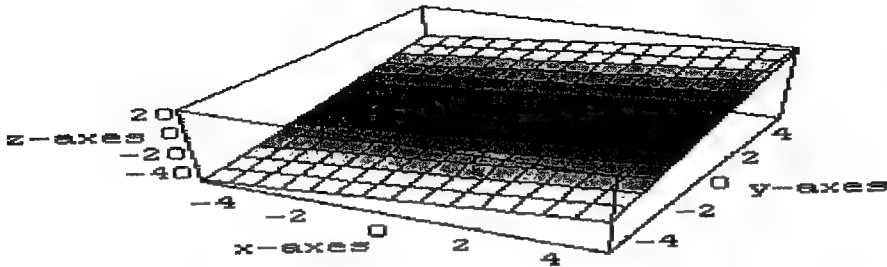


رسم المستوى  $z = 3x + 4y - 9$  على المنطقة المستطيلة الشكل

$$-5 \leq x \leq 5, \quad -5 \leq y \leq 5$$

وبحيث يتم تظليل سطح المستوى وفقا للدالة  $\text{GrayLevel}[\text{Abs}[x]/5]$  حيث تتغير قيم  $x, y$  على المنطقة المعطاة ونلاحظ في الرسم تدرج التظليل لسطح المستوى في اتجاه محور  $x$  كما نلاحظ كتابة عناوين على المحاور نتيجة للاختيار  $\text{AxesLabel}$

```
In[21]:=Plot3D[{3x+4y-9,GrayLevel[Abs[y]/5]},{x,-5,5},{y,-5,5},
  AxesLabel->{"x-axes","y-axes","z-axes"}]
```



رسم المستوى  $z = 3x + 4y - 9$  على المنطقة المستطيلة الشكل

$$-5 \leq x \leq 5, \quad -5 \leq y \leq 5$$

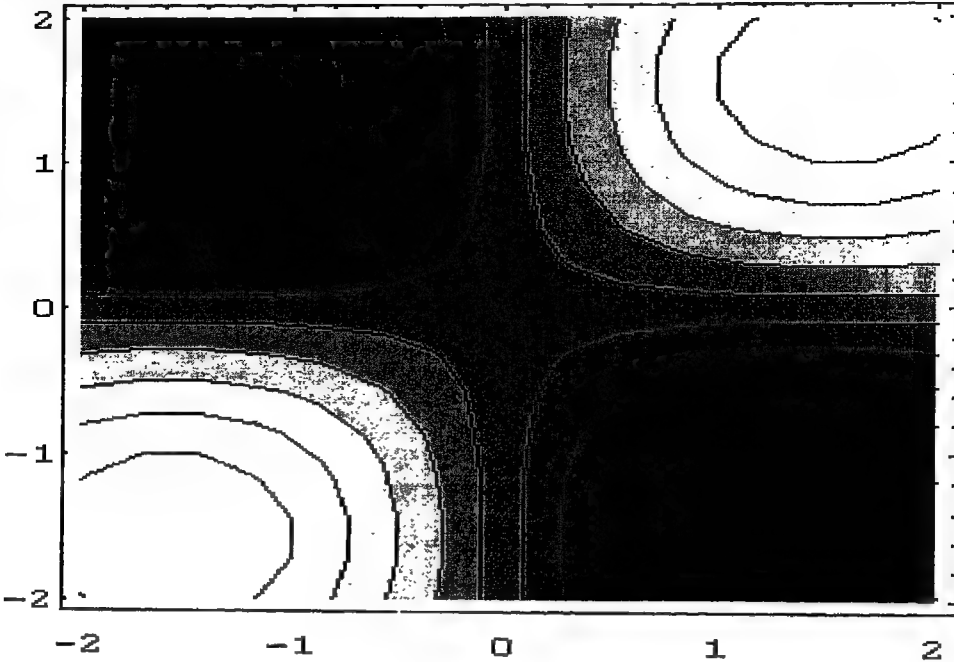
وبحيث يتم تظليل سطح المستوى وفقا للدالة  $\text{GrayLevel}[\text{Abs}[y]/5]$  حيث تتغير قيم  $x, y$  على المنطقة المعطاة ونلاحظ في الرسم تدرج التظليل لسطح المستوى في اتجاه محور  $y$  كما نلاحظ كتابة عناوين على المحاور نتيجة للاختيار  $\text{AxesLabel}$

وعندما نحاول التعمق في فهم طبيعة سطح خاص فإنه يكون من المفيد النظر إلى السطح بطرق مختلفة والأمر `Plot3D` يقدم لنا صورة في الفراغ للسطح وفي برنامج ماتيماتيكا يمكن الحصول على خريطة لمقاطع السطح بطريقة خطوط الكونتور التي تربط النقط الواقعة على السطح والتي لها نفس الارتفاع ويتم ذلك عن طريق الأمر `ContourPlot` كالآتي:

`ContourPlot[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]`

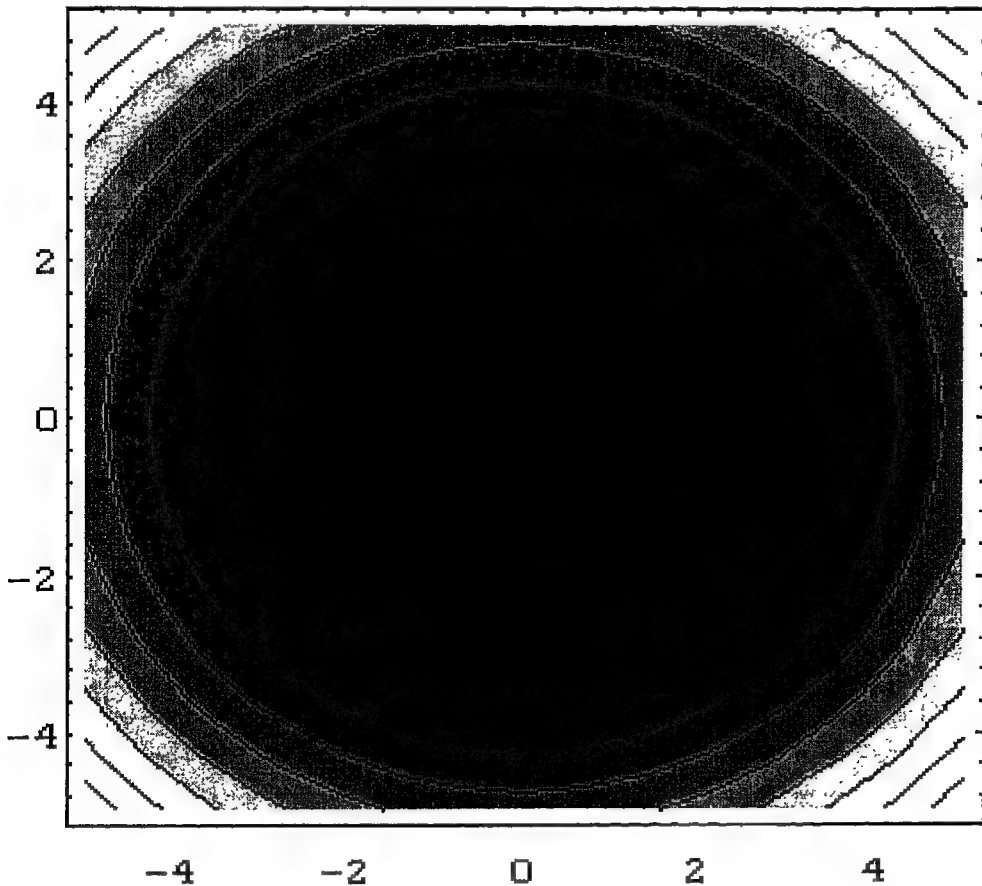
رسم خطوط الكونتور للدالة  $f(x,y)$  في النطاق من  $x = \text{xmin}$  إلى  $x = \text{xmax}$  ومن  $y = \text{ymin}$  إلى  $y = \text{ymax}$

`In[22]:=ContourPlot[Sin[x] Sin[y], {x,-2,2},{y,-2,2}]`



رسم مقاطع سطح الدالة  $f(x,y) = \text{Sin}(x) \text{Sin}(y)$  بطريقة خطوط الكونتور في المنطقة  $-2 \leq x \leq 2$  ,  $-2 \leq y \leq 2$

```
In[23]:= ContourPlot[x^2+y^2, {x,-5,5},{y,-5,5}]
```



رسم مقاطع سطح الدالة  $f(x,y)=x^2+y^2$  بطريقة خطوط الكونتور في المنطقة

$$-5 \leq x \leq 5 \quad , \quad -5 \leq y \leq 5$$

### ٣ . رسم الدوال البارامترية Parametric Plots

إذا كان  $f(x)$  دالة وحيدة القيمة single valued فإن المعادلات التي على الصورة  $y = f(x)$  تصف منحنيات في المستوى يقطعها أي خط رأسي مرة واحدة فقط في نطاق التعريف ، والإحداثي  $y$  لكل نقطة يكون دالة في الإحداثي  $x$  ولكن توجد منحنيات أكثر تعقيدا تضاعف نفسها ومثل هذه المنحنيات يمكن دراستها بسهولة باستخدام الصورة البارامترية ويتم ذلك بجعل المتغيرات  $x, y$  دوال في متغير آخر  $t$  مثل  $x = g(t)$  ,  $y = h(t)$  وكل قيمة للمتغير  $t$  تعين قيمة للمتغيرات  $x, y$  يمكن اعتبارها إحداثيات نقطة في المستوى  $xy$  وفئة جميع النقط  $(g(t), h(t))$  تكون منحنى والمعادلتان  $x = g(t)$  ,  $y = h(t)$  تسميان المعادلتان البارامتريتان للمنحنى والمتغير  $t$  يسمى بارامتر . وبرنامج ماتيماتيكا قادر على رسم الدوال في المستوى بالصورة البارامترية وذلك باستخدام الأمر ParametricPlot كالآتي :

**ParametricPlot[{fx, fy}, {t, tmin, tmax}]**

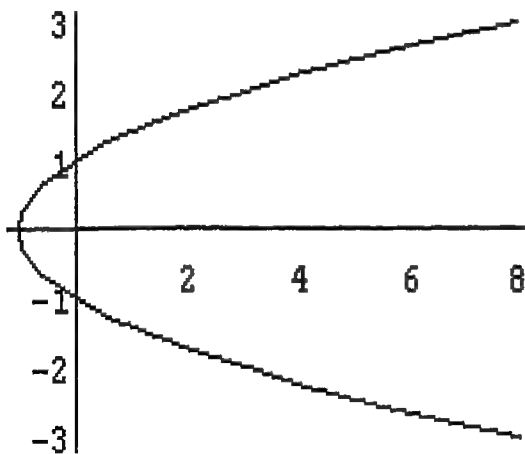
رسم الدالة المعطاة بالصورة البارامترية

$x=fx$  ,  $y=fy$  ,  $tmin \leq t \leq tmax$   
حيث  $fx$  ,  $fy$  دوال في البارامتر  $t$

**ParametricPlot[{ {fx, fy}, {gx, gy}, ...}, {t, tmin, tmax}]**

رسم أكثر من دالة معطاة بالصورة البارامترية

In[1]:=ParametricPlot[{t^2-1,t},{t,-3,3}]



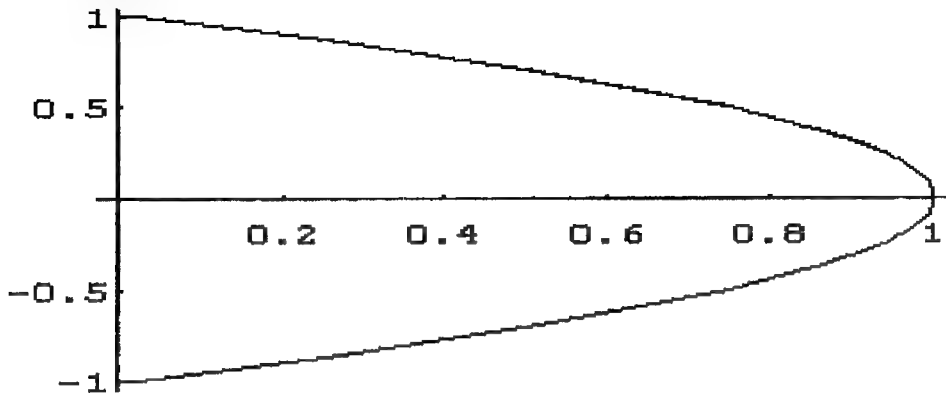
رسم المنحنى الذى معادلته البارامترتان

$$x=t^2-1, y=t, -3 \leq t \leq 3$$

والمنحنى فى الصورة الكارتيزية يكون

$$x^2=x+1, -1 \leq x \leq 8$$

In[2]:=ParametricPlot[{Cos[t]^2,Sin[t]},{t,0,2Pi}]



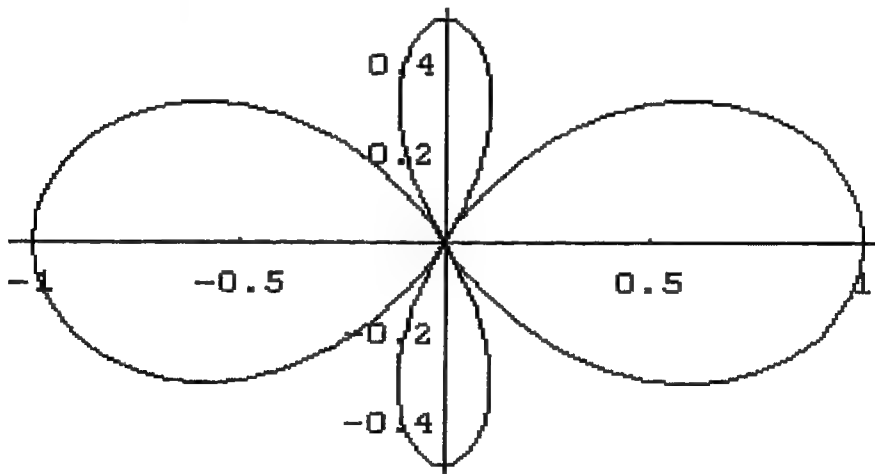
رسم المنحنى الذى معادلته البارامترتان

$$x=\cos^2(t), y=\sin(t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

والمنحنى فى الصورة الكارتيزية يكون

$$y^2=1-x, 0 \leq x \leq 1$$

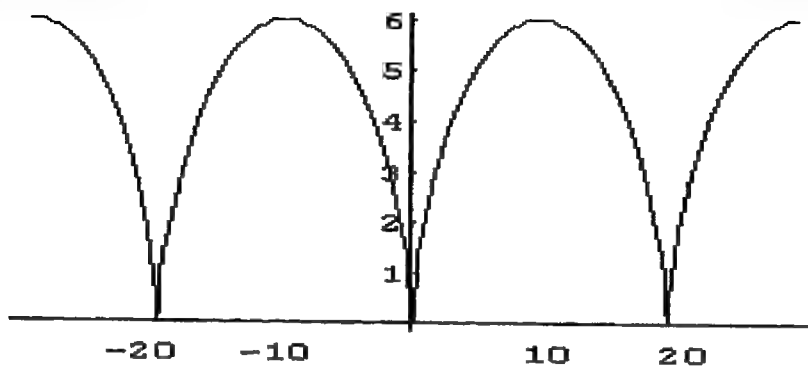
```
In[3]:=r[t_]:= (3Cos[t]^2-1)/2;  
ParametricPlot[{r[t]Cos[t],r[t]Sin[t]},{t,0,2Pi}]
```



رسم المنحنى فى الصورة القطبية

$$r = \frac{3\cos^2(t) - 1}{2}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

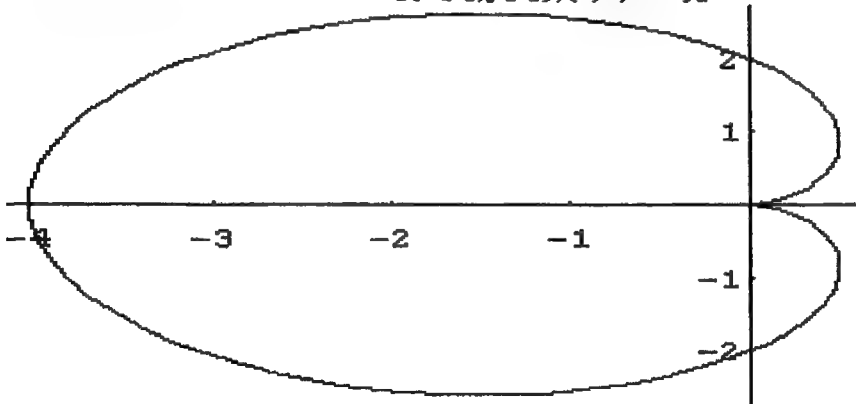
```
In[4]:=ParametricPlot[{3(t-Sin[t]),3(1-Cos[t])},{t,-3Pi,3Pi}]
```



رسم منحنى الدويرى ( السيكلويد )

$$\begin{aligned} x &= 3(t - \sin(t)) \\ y &= 3(1 - \cos(t)) \quad , \quad -3 \leq t \leq 3 \end{aligned}$$

```
In[5]:=x[t_]:=2(Cos[t]-Cos[t]^2);
y[t_]:=2(Sin[t]-Sin[t] Cos[t]);
ParametricPlot[{x[t],y[t]},{t,0,2Pi}]
```

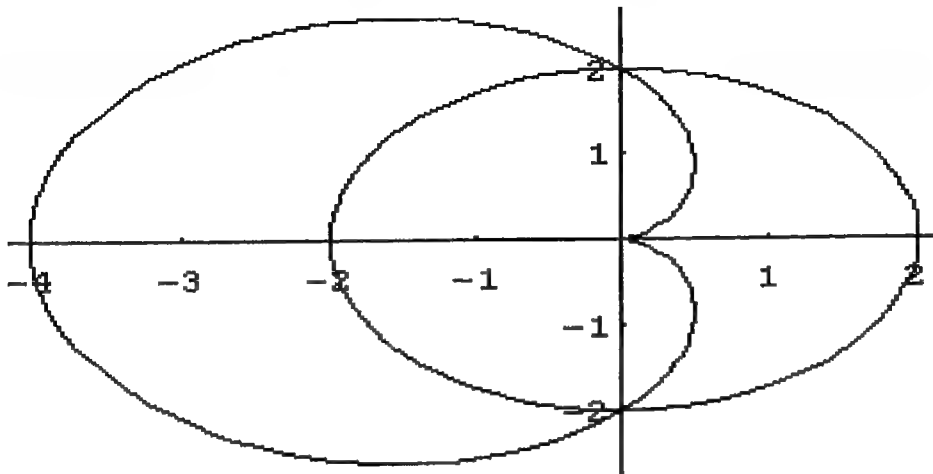


رسم منحنى الكارديويد المعطى بالصورة البارامترية

$$x(t) = 2 \cos(t) [1 - \cos(t)]$$

$$y(t) = 2 \sin(t) [1 - \cos(t)]$$

```
In[6]:=ParametricPlot[{x[t],y[t]},{2Cos[t],2Sin[t]},{t,0,2Pi}]
```

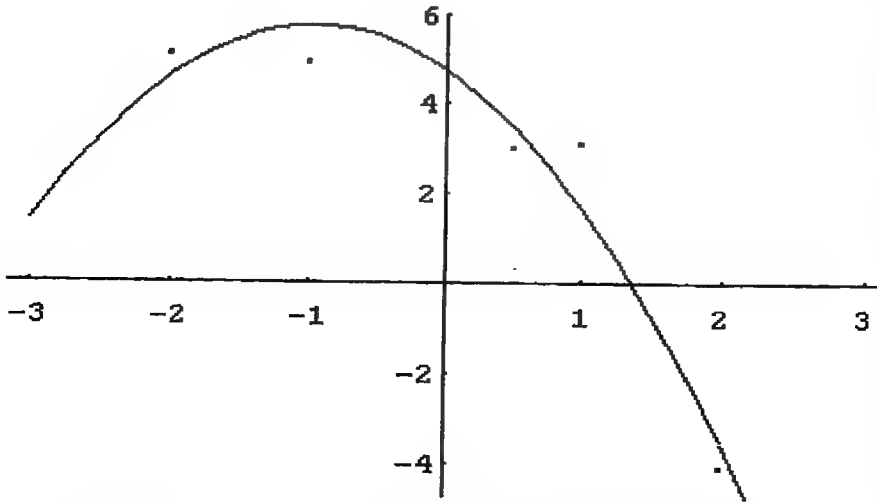


رسم منحنى الكارديويد السابق مع الدائرة المعطاة بالصورة القطبية

$$x(t) = 2 \cos(t)$$

$$y(t) = 2 \sin(t)$$

## الباب السادس ماثيماتيكيا والتحليل العددي



في هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكيا  
والخاصة بالموضوعات الآتية :

١. الحل العددي لمعادلات كثيرات الحدود

Numerical Solution of Polynomial Equations

Numerical Root Finding

٢. إيجاد جذر تقريبي

Numerical Minimization

٣. إيجاد القيم الصغرى

٤. الحساب العددي للمجموع وحواصل الضرب

Numerical Sum and Product

Numerical Integration

٥. التكامل العددي

Least - squares

٦. التقريب بالمربعات الصغرى



## الباب السادس

### ماثيماتكا والتحليل العددي

التحليل العددي Numerical Analysis هو أحد فروع الرياضيات التي تعتمد بقوة على التطورات الحديثة في علم الكمبيوتر وعلى التطبيقات في استخدام الطرق العددية لحل المسائل الرياضية المختلفة . ومن أكثر مميزات ماثيماتكا هو المقدرة على الحصول على نتائج مضبوطة وفي صورة رمزية Exact Symbolic Results للحسابات الرياضية المختلفة وفي بعض الحسابات يكون من غير الممكن الحصول على النتائج المضبوطة ولمثل هذه الحسابات فإن ماثيماتكا يقدم العديد من الدوال والأوامر للحصول على قيم عددية تقريبية للنتائج وكما علمنا من قبل فإن الدالة N والتي تستخدم بالصورة

$\text{expr}/N$  أو  $N[\text{expr}]$

تقوم بحساب قيمة عددية تقريبية للعملية الحسابية  $\text{expr}$  والدالة

$N[\text{expr},n]$

تقوم بحساب قيمة عددية تقريبية للعملية الحسابية  $\text{expr}$  مقربة الى  $n$  من الأرقام العشرية وفي هذا الباب سوف نتعرف على بعض أوامر ماثيماتكا الخاصة بالحصول على قيم تقريبية لنتائج العمليات الرياضية في مجالات مختلفة من التحليل العددي .

## ١. الحل العددي لمعادلات كثيرات الحدود Numerical Solution of Polynomial Equations

في برنامج ماتيماتيكا يمكن حل معادلات كثيرات الحدود باستخدام الأمر Solve كما عرفنا في الباب الثالث وفي حالة عدم الحصول على حل صريح للمعادلة أو مجموعة المعادلات يمكن استخدام الدالة N للحصول على حلول عددية تقريبية

باستخدام الأمر Solve يمكن حل معادلة  

$$\text{In}[1] := \text{Solve}[x^2 - 3x + 2 == 0, x]$$
 كثيرة الحدود  $x^2 - 3x + 2 = 0$  والحصول  

$$\text{Out}[1] = \{\{x \rightarrow 1\}, \{x \rightarrow 2\}\}$$
 على الجذور

الأمر Solve لم يتمكن من إيجاد حل معادلة  

$$\text{In}[2] := \text{Solve}[x^5 + 7x + 1 == 0, x]$$
 كثيرة الحدود  $x^5 + 7x + 1 = 0$   

$$\text{Out}[2] = \text{ToRules}[\text{Roots}[7x + x^5 == -1, x]]$$

باستخدام الدالة N نحصل على  
 قيمة عادية تقريبية للحل  

$$\text{In}[3] := \text{N}[\%]$$

$$\text{Out}[3] = \{\{x \rightarrow -1.11308 - 1.15173 I\},$$

$$\{x \rightarrow -1.11308 + 1.15173 I\},$$

$$\{x \rightarrow -0.142849\},$$

$$\{x \rightarrow 1.1845 - 1.15139 I\}, \{x \rightarrow 1.1845 + 1.15139 I\}\}$$

ويمكن إيجاد حلول عددية تقريبية بطريقة مباشرة لمعادلات كثيرات الحدود بدون الحاجة الى إيجاد الحل المضبوط أولاً وذلك باستخدام الأمر **NRoots** كالآتي :

<b>NRoots[poly==0,x]</b>	للحصول على حل عددي تقريبي لمعادلة <b>poly = 0</b> كثيرة الحدود بالنسبة الى المتغير <b>x</b>
<b>NRoots[poly==0,x,n]</b>	للحصول على حل عددي تقريبي لمعادلة <b>poly = 0</b> كثيرة الحدود بالنسبة الى المتغير <b>x</b> وبدقة <b>n</b> رقم عشري

**In[4]:=NRoots[x^5+7x+1==0,x]**

للحصول على حل عددي تقريبي لمعادلة

**Out[4]=**

كثيرة الحدود  $x^5 + 7x + 1 = 0$

**x == -1.11308 - 1.15173 I ||**

**x == -1.11308 + 1.15173 I || x == -0.142849 ||**

**x == 1.1845 - 1.15139 I || x == 1.1845 + 1.15139 I**

**In[5]:=ToRules[%]**

لجعل الحل الناتج من جملة الإدخال **In[4]**

**Out[5]=**

في صورة قائمة بدلا من الصورة المنطقية

**Sequence[{x -> -1.11308 - 1.15173 I},  
{x -> -1.11308 + 1.15173 I},  
{x -> -0.142849},  
{x -> 1.1845 - 1.15139 I},  
{x -> 1.1845 + 1.15139 I}]**

## ٢. إيجاد جذر تقريبي Numerical Root Finding

الأمر **NRroots** يقدم طريقة لإيجاد حلول عددية تقريبية لمعادلات كثيرات الحدود لكن إيجاد حلول عددية لمعادلات عامة (تحتوى على دوال مثلثية أو أسية أو لوغاريتمية...) يكون أكثر صعوبة ، وبرنامج ماثياتيكا يحتوى على الأمر **FindRoot** الذى يقدم طريقة عددية للبحث عن أي جذر للمعادلة أو مجموعة من المعادلات بالقرب من نقطة بداية  $x_0$  وذلك باستخدام طريقة نيوتن **Newton's method** فى إيجاد جذر للمعادلة  $f(x) = 0$  مبتدئا من نقطة البداية  $x_0$  ومعلومية قيمة المشتقة  $f'(x)$  يتم الحصول على متتابعة من القيم  $x_n$  حتى نصل الى اقرب جذر من نقطة البداية ويتم طباعة هذا الجذر فقط حتى إذا كان للمعادلة أكثر من جذر ، ومتتابعة القيم  $x_n$  تحسب من العلاقة التكرارية

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} , n = 0, 1, \dots$$

وفى حالة إذا كان من الصعب الحصول على مشتقة الدالة بصورة رمزية فإنه يتم حساب المشتقة  $f'(x)$  بصورة عددية تقريبية من العلاقة

$$f'(x_n) \cong \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}$$

ويتم حساب جذر للمعادلة  $f(x) = 0$  باستخدام طريقة القاطع **secant method** من العلاقة

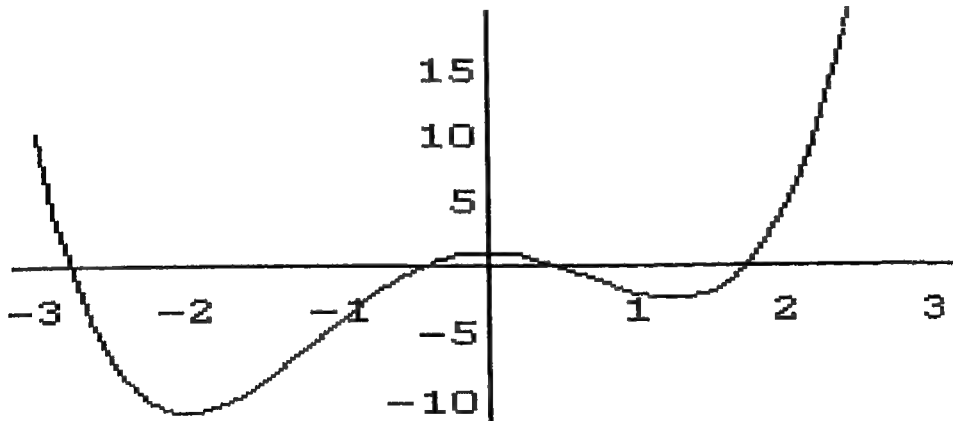
$$x_{n+1} = x_n - \left( \frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} \right) f(x_n) , n = 1, 2, \dots$$

حيث  $x_0$  و  $x_1$  قيم ابتدائية يتم تحديدها .

وفي الجدول الآتي نعرض الصيغ المختلفة للأمر FindRoot

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
<b>FindRoot[lhs==rhs,{x,x0}]</b>	البحث عن جذر للمعادلة <b>lhs==rhs</b> مبتدئاً من النقطة $x = x_0$
<b>FindRoot[lhs==rhs, {x,xstart,xmin,xmax}]</b>	البحث عن جذر للمعادلة <b>lhs==rhs</b> مبتدئاً من النقطة $x = xstart$ وبحيث يتم البحث داخل النطاق من $x = xmin$ الى $x = xmax$ ويتم إيقاف البحث عن الجذر خارج هذا الإطار
<b>FindRoot[lhs==rhs,{x,{x0,x1}}]</b>	البحث عن جذر للمعادلة <b>lhs==rhs</b> مبتدئاً من القيم الابتدائية $x_0$ و $x_1$ باستخدام طريقة القاطع
<b>FindRoot[{eqn1,eqn2,...},{x,x0}, {y,y0},...]</b>	البحث عن جذر لمجموعة المعادلات <b>eqn1 , eqn2 , ...</b> في وقت واحد مبتدئاً من نقط البداية $x_0 , y_0 , ...$

In[1]:=f[x\_]:=1-5 x^2+x^3+x^4;Plot[f[x],{x,-3,3}]



تعريف الدالة  $f(x)$  وهي كثيرة حدود من الدرجة الرابعة ثم رسم الدالة في الفترة  $(-3,3)$

In[2]:=FindRoot[f[x]==0,{x,-2.5}]

Out[2]={x -> -2.76251}

للحصول على جذر عددي تقريبي للمعادلة

$f(x) = 0$  بالقرب من نقطة البداية  $x = -2.5$

In[3]:=FindRoot[f[x]==0,{x,0.1}]

Out[3]={x -> 0.483179}

للحصول على جذر عددي تقريبي للمعادلة

$f(x) = 0$  بالقرب من نقطة البداية  $x = 0.1$

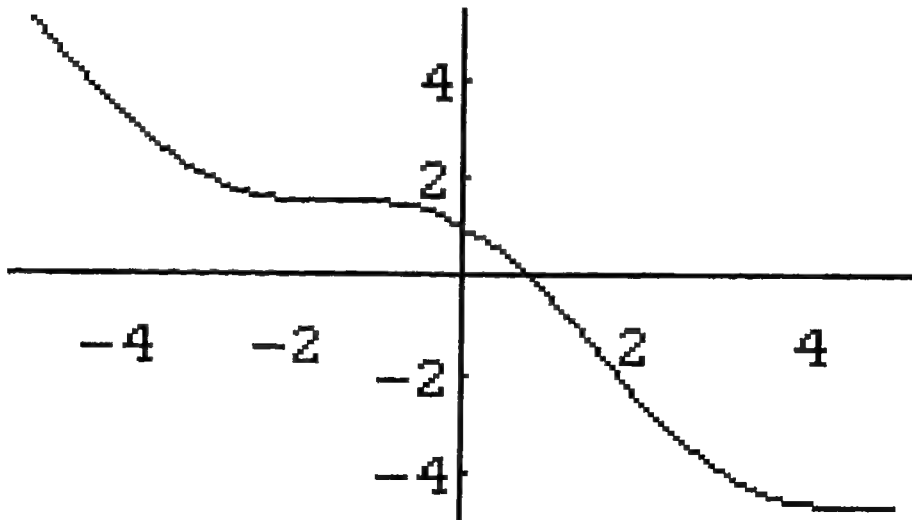
In[4]:=FindRoot[f[x]==0,{x,2}]

Out[4]={x -> 1.71594}

للحصول على جذر عددي تقريبي للمعادلة

$f(x) = 0$  بالقرب من نقطة البداية  $x = 2$

In[5]:= Plot[Cos[x]-x,{x,-5,5}]



رسم الدالة  $\cos(x) - x$  في الفترة  $[-5, 5]$

In[6]:= FindRoot[Cos[x]==x,{x,0}]

Out[6]={x -> 0.739085}

للحصول على جذر عددي تقريبي للمعادلة

$\cos x = x$  بالقرب من  $x=0$

In[7]:= FindRoot[Cos[x]==x,{x,{0,1}}]

Out[7]={x -> 0.739085}

للحصول على جذر عددي تقريبي للمعادلة

مبتدئا من نقط البداية  $x_0 = 0$  ,  $x_1 = 1$

In[8]:= FindRoot[x^2-1==0,{x,Random[]}]

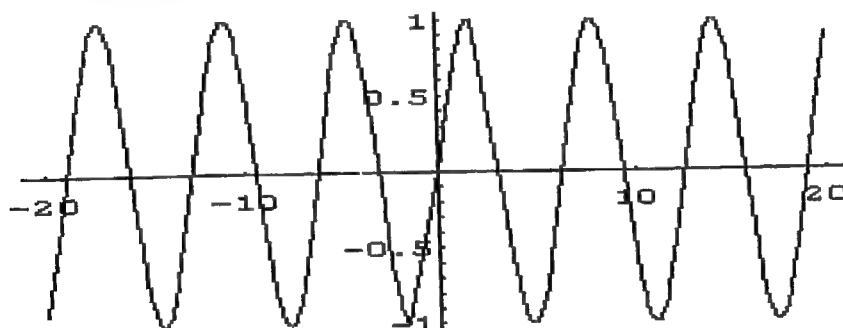
Out[8]={x -> 1.}

للحصول على جذر عددي تقريبي للمعادلة

$x^2 - 1 = 0$  بالقرب من نقطة بداية يتم

اختيارها عشوائيا داخل الفترة  $(0,1)$

In[9]:=Plot[Sin[x],{x,-20,20}]



منحنى الدالة  $\sin(x)$  يقطع محور  $x$  في عدد لانهاى من النقط  
 $x = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

In[10]:=FindRoot[Sin[x]==0,{x,3}]

Out[10]={x -> 3.14159}

للحصول على جدر عددى تقريبي للمعادلة  
 $\sin x = 0$  بالقرب من نقطة البداية  $x=3$

In[11]:=FindRoot[Sin[x]==2,{x,1}]

Out[11]=FindRoot::cvmwt:

Newton's method failed to converge  
 to the prescribed accuracy after 15  
 iterations.

المعادلة  $\sin x = 2$  ليس لها حل حقيقى ولكن  
 لها حل مركب لذلك تظهر رسالة تفيد بأن طريقة  
 نيوتن لا تقرب من الجذر

In[12]:=FindRoot[Sin[x]==2,{x,I}]

Out[12]={x -> 1.5708 + 1.31696 I}

للحصول على جدر عددى تقريبي للمعادلة  
 $\sin x = 2$  بالقرب من نقطة البداية  $x=I$

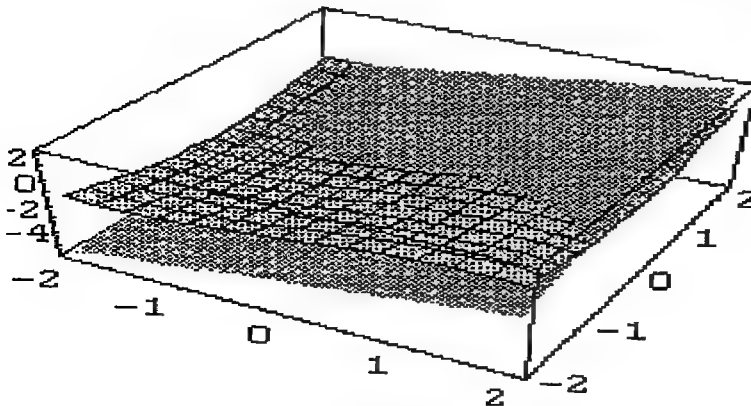
In[13]:=FindRoot[Sin[x]==0,{x,3,2.5,3.5}]

Out[13]={x -> 3.14159}

الدالة FindRoot تقوم بالبحث عن جدر  
 عددى تقريبي للمعادلة  $\sin x = 0$  بالقرب  
 من نقطة البداية  $x=3$  وداخل الفترة  
 $[2.5, 3.5]$  فقط ونلاحظ في هذا المثال انه  
 يوجد جدر في هذه الفترة

In[14]:=FindRoot[Sin[x]==0,{x,1,0.5,1.5}] تقوم بالبحث عن جذر عددي  
 Out[14]=FindRoot::regex:  $\sin x = 0$  مبتدئا من النقطة  $x=1$  تقريبي للمعادلة  
 Reached the point {-0.557408} فقط ونلاحظ في هذا [0.5,1.5] وداخل الفترة  
 which is outside the region {{0.5, 1.5}}. المثال انه لا يوجد جذر في هذه الفترة  
 {x -> -0.557408}

In[15]:=p1=Plot3D[Sin[x]-Cos[y],{x,-2,2},{y,-2,2},  
 DisplayFunction->Identity];  
 p2=Plot3D[x+y-1,{x,-2,2},{y,-2,2},Mesh->False,  
 DisplayFunction->Identity];  
 Show[p1,p2]



في هذا المثال تم استعراض رسم الدالة  $\sin(x) - \cos(y)$  وتخطيط السطح الناتج بخطوط  
 شبكية مع رسم الدالة  $x + y - 1$  بدون تخطيط السطح الناتج وقد تم رسم الدالتين معا  
 في شكل واحد لتوضيح تقاطع السطحين . ولإيجاد حل عددي تقريبي للمعادلتين معا  
 في آن واحد مبتدئا من نقط البداية  $x = 0.1$  ,  $y = 0.2$

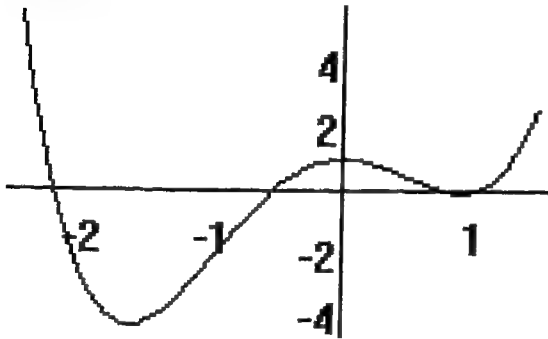
In[16]:=FindRoot[{Sin[x]==Cos[y],x+y==1},{x,0.1},{y,0.2}]  
 Out[16]= {x -> 1.2854, y -> -0.285398}

### ٣ . إيجاد القيم الصغرى Numerical Minimization

فى برنامج ماتيماتكا الأمر **FindRoot** يقدم لنا طريقة عددية لإيجاد نقط تنعدم عندها الدالة وفى بعض الأحيان يكون من المهم إيجاد نقط تكون عندها الدالة  $f(x)$  اصغر ما يمكن أي إيجاد نقط نهايات صغرى محلية **local minimum** للدالة  $f(x)$  ويمكن الحصول على هذه النقط عن طريق تطبيق الأمر **FindRoot** على مشتقة الدالة  $f(x)$  ، وماتيماتكا يقدم الأمر **FindMinimum** لحساب نقط نهايات صغرى للدالة  $f(x)$  بطريقة مباشرة وكذلك القيم الصغرى للدالة عند هذه النقط وباستخدام العلاقة  $\max(f) = -\min(-f)$  يمكن إيجاد نقط النهايات العظمى للدالة  $f(x)$  .

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
<b>FindMinimum[f,{x,x0}]</b>	البحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة $f$ بالقرب من نقطة البداية $x_0$ وحساب القيمة الصغرى للدالة.
<b>FindMinimum[f,{x,xstart,xmin,xmax}]</b>	البحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة $f$ بالقرب من نقطة البداية $x=xstart$ وبحيث يتم البحث فقط داخل النطاق من $x=xmin$ الى $x=xmax$ وحساب القيمة الصغرى للدالة .
<b>FindMinimum[f,{x,{x0,x1}}]</b>	البحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة $f$ بالقرب من القيم الابتدائية $x_0, x_1$ وحساب القيمة الصغرى للدالة ويستخدم الأمر <b>FindMinimum</b> بهذه الصورة عندما يكون من الصعب إيجاد التفاضل للدالة $f$
<b>FindMinimum[f,{x,x0},{y,y0},...]</b>	البحث عن نقطة نهاية صغرى محلية لدالة فى اكثر من متغير $f(x, y, \dots)$ بالقرب من القيم الابتدائية $x=x_0, y=y_0, \dots$ وحساب القيمة الصغرى للدالة .

In[1]:= f[x\_]:=1-3x^2+x^3+x^4;Plot[f[x],{x,-2.5,1.5}]



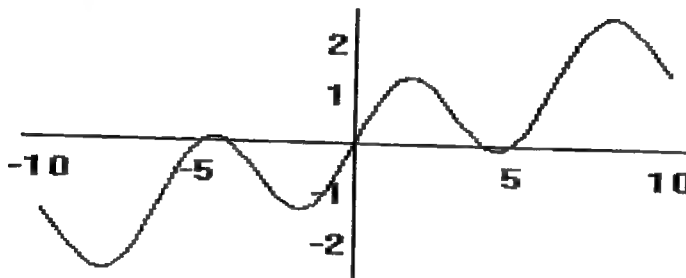
تعريف الدالة  
 $f(x) = 1 - 3x^2 + x^3 + x^4$   
 ثم رسمها في الفترة  $[-2.5, 1.5]$   
 ونلاحظ أن الدالة لها نقطتي نهاية  
 صفري محلية في نطاق التعريف

In[2]:=FindMinimum[f[x],{x,-2}] للبحث عن نقطة نهاية صفري محلية للدالة بالقرب من  
 Out[2]={-4.24791, {x -> -1.65587}} النقطة  $x = -2$  وإيجاد القيمة الصفري للدالة عندها

In[3]:=FindMinimum[f[x],{x,0.5}] للبحث عن نقطة نهاية صفري محلية للدالة بالقرب من  
 Out[3]={-0.0450589, {x -> 0.905869}} النقطة  $x = 1$  اد القيمة الصفري للدالة عندها

In[4]:=maxf=-FindMinimum[-f[x],{x,-5}] للبحث عن نقطة نهاية عظمى محلية للدالة بالقرب من  
 Out[4]={1., {- {x->9.54982 10<sup>-13</sup>}}} من النقطة  $x = .5$  إيجاد القيمة العظمى للدالة عندها

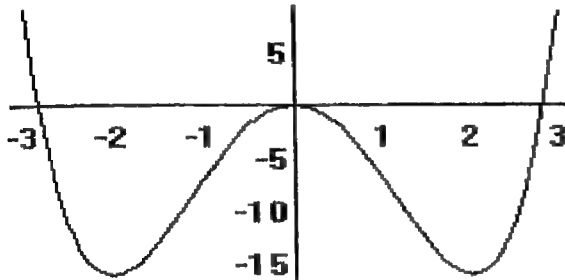
In[5]:= Plot[Sin[x]+x/5,{x,-10,10}]



رسم الدالة  
 $\sin x + x/5$   
 على الفترة  $[-10, 10]$   
 ونلاحظ أن الدالة لها أكثر  
 من نقطة نهاية صفري محلية  
 في نطاق التعريف .

In[6]:=FindMinimum[Sin[x]+x/5,{x,1}] للبحث عن نقطة نهاية صفري محلية للدالة بالقرب من  
 Out[6]={-1.33423, {x -> -1.77215}} من النقطة  $x = 1$  جاد القيمة الصفري للدالة عندها

In[ 7]:= r3[x\_]:=x^4-8x^2;Plot[r3[x],{x,-3,3}]



تعريف الدالة

$$r3(x) = x^4 - 8x^2$$

ثم رسمها في الفترة  $[-3, 3]$

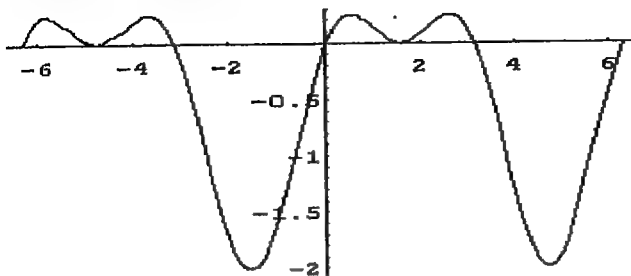
ونلاحظ أن الدالة لها نقطتي نهاية

صغرى محلية في نطاق التعريف .

In[8]:=FindMinimum[r3[x],{x,1.5}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من  
Out[8]={-16., {x -> 2.}} النقطة  $x = 1.5$  وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[9]:=FindMinimum[r3[x],{x,-1,-2.5,0}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة  
Out[9]={-16., {x -> -2.}} بالقرب من النقطة  $x = -1$  وفي النطاق  
[-2.5,0] وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[10]:= r4[x\_]:=Sin[x]-Sin[x]^2; Plot[r4[x],{x,-2Pi,2Pi}]



تعريف الدالة

$$r4(x) = \sin(x) - \sin^2(x)$$

ثم رسمها في الفترة  $[-2\pi, 2\pi]$

ونلاحظ أن الدالة لها أكثر من نقطة

نهاية صغرى محلية في نطاق التعريف .

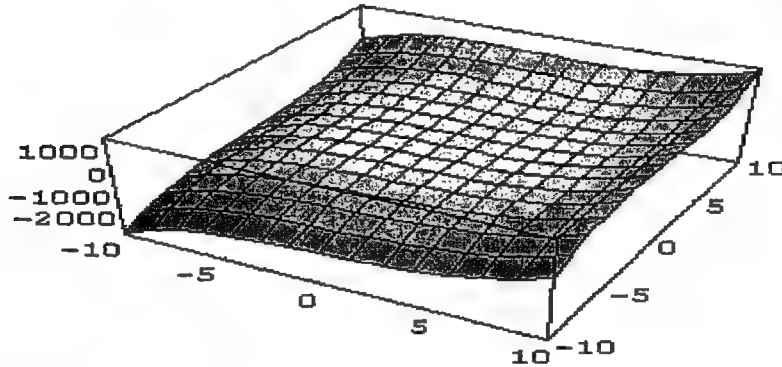
In[11]:= FindMinimum[r4[x],{x,6}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة  $r4[x]$  بالقرب  
Out[11]={-2., {x -> 4.71239}} من النقطة  $x = 6$  وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[12]:= FindMinimum[r4[x],{x,-3}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة  $r4[x]$  بالقرب  
Out[12]={-2., {x -> -1.5708}} من النقطة  $x = -3$  وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[13]:= FindMinimum[r4[x],{x,-4}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة  $r4[x]$  بالقرب  
Out[13]={2.22045 10<sup>-16</sup>, {x -> -4.71239}} من النقطة  $x = -4$  وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[14]:= - FindMinimum[-r4[x],{x,-4}] للبحث عن نقطة نهاية عظمى محلية للدالة  $r4[x]$  بالقرب  
Out[14]={0.25, {-(x -> -3.66519)}} من النقطة  $x = -4$  وإيجاد القيمة العظمى للدالة عندها

In[15]:= f[x\_,y\_]:=x^3+y^3-3xy; Plot3D[f[x,y],{x,-10,10},{y,-10,10}]

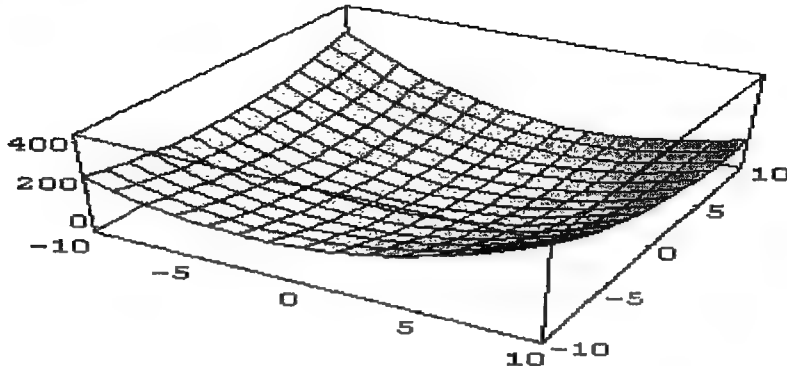


تعريف الدالة  $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$  ثم رسمها في الفراغ في المنطقة  $-10 \leq x \leq 10$  ,  $-10 \leq y \leq 10$

In[16]:=FindMinimum[f[x,y],{x,0.4},{y,0.5}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة

Out[16]={-1., {x -> 1., y -> 1.}} بالقرب من  $x=0.4$  ,  $y=0.5$  وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها .

In[17]:=h[x\_,y\_]:=2x^2+y^2-x y-7y; Plot3D[h[x,y],{x,-10,10},{y,-10,10}]



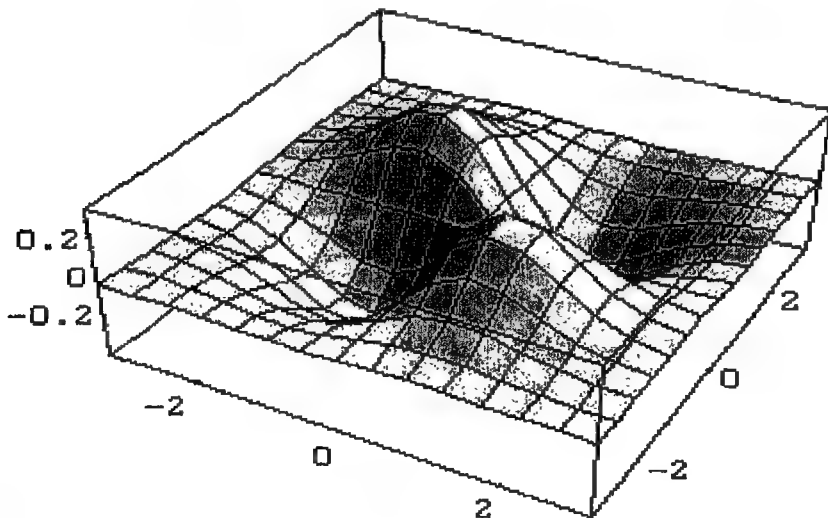
تعريف الدالة  $h(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$  ثم رسمها في الفراغ في المنطقة  $-10 \leq x \leq 10$  ,  $-10 \leq y \leq 10$

In[18]:=FindMinimum[h[x,y],{x,2},{y,5}]

Out[18]={-14., {x -> 1., y -> 4.}}

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من  $x=0.4$  ,  $y=0.5$  وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها .

```
In[19]:= g[x_,y_]:=-x y Exp[-(x^2+y^2)/2];
          Plot3D[g[x,y],{x,-Pi,Pi},{y,-Pi,Pi}]
```



تعريف الدالة  $g(x,y) = -x y \text{Exp}[-(x^2 + y^2)/2]$  ثم رسمها في الفراغ في المنطقة  $-\pi \leq x \leq \pi$  ,  $-\pi \leq y \leq \pi$

```
In[20]:=FindMinimum[g[x,y],{x,0.6},{y,0.5}]
```

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة  $(0.6, 0.5)$  وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها  $\{-0.367879, \{x \rightarrow 1., y \rightarrow 1.\}\}$  بالقرب من

```
In[21]:=FindMinimum[g[x,y],{x,-1.5},{y,-0.5}]
```

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب  $(-1.5, -0.5)$  وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها  $\{-0.367879, \{x \rightarrow -1., y \rightarrow -1.\}\}$  من

```
In[22]:=FindMinimum[-g[x,y],{x,-1.5},{y,0.5}]
```

للبحث عن نقطة نهاية عظمى محلية للدالة بالقرب  $(-1.5, 0.5)$  وإيجاد القيمة العظمى للدالة عندها  $\{0.367879, \{-x \rightarrow -1., -y \rightarrow 1.\}\}$  من

```
In[23]:=FindMinimum[-g[x,y],{x,1.5},{y,-0.5}]
```

للبحث عن نقطة نهاية عظمى محلية للدالة بالقرب  $(1.5, -0.5)$  وإيجاد القيمة العظمى للدالة عندها  $\{0.367879, \{-x \rightarrow 1., -y \rightarrow -1.\}\}$  من

## ٤. الحساب العددي للمجموع وحواصل الضرب Numerical Sum and Product

فى برنامج ماتيماتكا أمر المجموع  $\text{Sum}[f, \{i, \text{imin}, \text{imax}\}]$  يقوم بحساب قيمة مضبوطة للمجموع  $\sum_{i=\text{imin}}^{\text{imax}} f$  حتى إذا كان المجموع فى صورة رمزية  $\text{symbolic}$  وفى بعض الحالات لا يستطيع ماتيماتكا حساب الناتج المضبوط للجمع عن طريق الدالة  $\text{Sum}$  خاصة إذا كان  $\text{imax} = \infty$  ولمثل هذه الحالات فإنه يمكن حساب قيمة عددية تقريبية للمجموع باستخدام الدالة  $N$  بالصورة

$\text{Sum}[f, \{i, \text{imin}, \text{imax}\}]/N$  أو فى الصورة  $N[\text{Sum}[f, \{i, \text{imin}, \text{imax}\}]]$

وماتيماتكا يقدم الأمر  $N\text{Sum}$  لحساب قيمة عددية تقريبية للمجموع مباشرة دون الحاجة الى حساب القيمة المضبوطة التى تتطلب العديد من العمليات وبالمثل يوجد فى ماتيماتكا الأمر  $N\text{Product}$  لحساب قيمة عددية تقريبية لحاصل الضرب

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
$N\text{Sum}[f, \{i, \text{imax}\}]$	إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=1}^{\text{imax}} f$
$N\text{Sum}[f, \{i, \text{imin}, \text{imax}\}]$	إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=\text{imin}}^{\text{imax}} f$
$N\text{Sum}[f, \{i, \text{imin}, \text{imax}, \text{step}\}]$	إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=\text{imin}}^{\text{imax}} f$ من $i=\text{imin}$ الى $i=\text{imax}$ بخطوة مقدارها $\text{step}$
$N\text{Sum}[f, \{i, \text{imin}, \text{imax}\}, \{j, \text{jmin}, \text{jmax}\}, \dots]$	إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=\text{imin}}^{\text{imax}} \sum_{j=\text{jmin}}^{\text{jmax}} f$
$N\text{Product}[f, \{i, \text{imin}, \text{imax}\}]$	إيجاد قيمة عددية تقريبية لحاصل الضرب $\prod_{i=\text{imin}}^{\text{imax}} f$

**In[1]:=Sum[1/i^3,{i,1,Infinity}]** ماتيماتكا لم يتمكن من حساب قيمة مضبوطة  
**Out[1]=Sum[i^-3 , {i, 1, Infinity}]** للمجموع باستخدام دالة Sum فقط

**In[2]:=Sum[1/I^3,{I,1,Infinity}]/N** وعند تطبيق الدالة N أمكن الحصول على  
**Out[2]=1.20206** قيمة عددية تقريبية للمجموع

**In[3]:=NSum[1/i^3,{i,1,Infinity}]** باستخدام دالة NSum أمكن مباشرة إيجاد  
**Out[3]=1.20206** قيمة عددية تقريبية للمجموع

**In[4]:=Sum[Exp[-n],{n,0,5}]** ماتيماتكا لم يتمكن من حساب قيمة مضبوطة  
**Out[4]=1 + E^-5 + E^-4 + E^-3 + E^-2 + E^-1** للمجموع باستخدام دالة Sum بالرغم  
 من أن  $imax = 5$  فقط

**In[5]:=NSum[Exp[-n],{n,0,Infinity}]** باستخدام دالة NSum أمكن مباشرة إيجاد  
**Out[5]=1.58198** قيمة عددية تقريبية للمجموع حتى مالا نهاية

In[6]:=NSum[1/n!,{n,0,Infinity}]

لإيجاد قيمة عددية تقريبية لمجموع

Out[6]=2.71828

المتسلسلة  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

In[7]:=NSum[1/(n(n+1)(n+2)),{n,1,Infinity}]

لإيجاد قيمة عددية تقريبية لمجموع

Out[7]=0.25

المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

In[8]:=NSum[1/(i^2+j^2),{i,1,5},{j,1,10}]

لإيجاد قيمة عددية تقريبية لمجموع المتسلسلة

Out[8]=2.39932

$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^{10} \frac{1}{i^2+j^2}$

In[9]:=Nproduct[1/i^2,{i,1,5}]

لإيجاد قيمة عددية تقريبية لحاصل الضرب  $\prod_{i=1}^5 \frac{1}{i^2}$

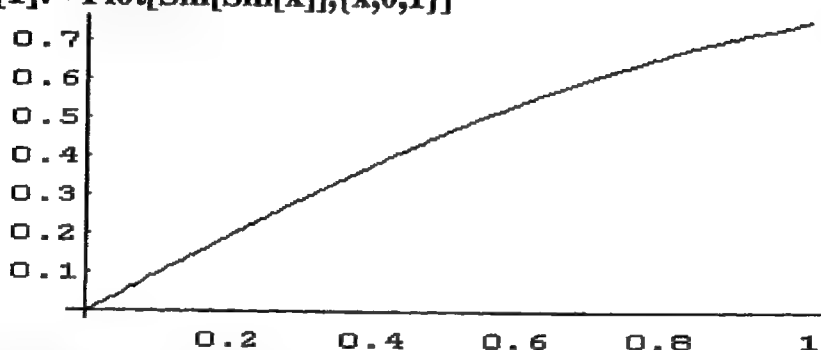
Out[9]=0.0000694444

## ٥ . التكامل العددي Numerical Integration

دالة التكامل **Integrate** تقوم بحساب التكامل  $\int f(x) dx$  بصورة رمزية **symbolic** حيث يتعامل برنامج ماتيماتيكا مع دالة التكامل  $f(x)$  ويقوم بإجراء متابعة من القواعد والتحويلات الرمزية وصولاً إلى القيمة المضبوطة للتكامل في صورة رمزية وتوجد بعض الدوال لا تستطيع دالة **Integrate** الحصول على قيم مضبوطة لتكاملاتها المحددة **definite** وفي هذه الحالة يمكن استخدام الدالة **N** لحساب قيمة عددية للتكامل ، وفي ماتيماتيكا يوجد الدالة **NIntegrate** لحساب قيمة عددية تقريبية للتكامل مباشرة دون الحاجة إلى حساب القيمة المضبوطة حيث يتم حساب متابعة من القيم العددية لدالة التكامل عند نقاط خاصة في نطاق التكامل ثم تستخدم هذه القيم في الوصول إلى قيمة عددية تقريبية جيدة للتكامل .

$N[Integrate[f,\{x,xmin,xmax\}]] \int_{xmin}^{xmax} f(x) dx$ <p>حساب قيمة مضبوطة للتكامل</p> <p>أولاً ثم إيجاد قيمة عددية تقريبية بعد ذلك</p>
$NIntegrate[f,\{x,xmin,xmax\}] \int_{xmin}^{xmax} f(x) dx$ <p>حساب قيمة عددية تقريبية مباشرة للتكامل</p>
$NIntegrate[f,\{x,xmin,xmax\},\{y,ymin,ymax\},...]$ <p>حساب قيمة عددية</p> <p>تقريبية مباشرة للتكامل المتعدد</p> $\int_{xmin}^{xmax} \int_{ymin}^{ymax} f(x,y) dx dy$
$NIntegrate[f,\{x,xmin,x1,x2,...,xmax\}]$ <p>حساب قيمة عددية تقريبية مباشرة</p> <p>للتكامل <math>\int_{xmin}^{xmax} f(x) dx</math> مع مراعاة النقاط الشاذة <math>x1,x2,...</math> لدالة التكامل</p>

In[1]:= Plot[Sin[Sin[x]],{x,0,1}]



In[2]:=Integrate[Sin[Sin[x]],{x,0,1}]

ماتيماتكا لا يستطيع الحصول على قيمة

Out[2]= On::none: Message SeriesData::

مضبوطة للتكامل

csa not found

$$\int_0^1 \sin(\sin(x)) dx$$

In[3]:=N[%]

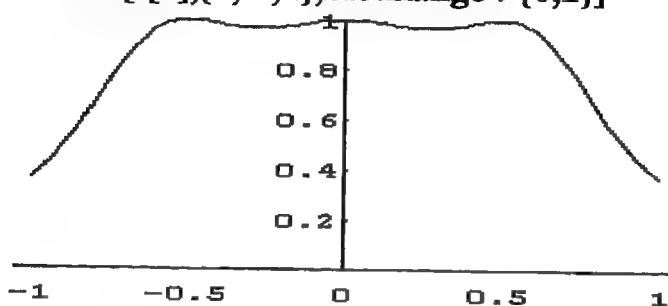
بواسطة الدالة N يمكن إيجاد قيمة

Out[3]=0.430606

عددية تقريبية للتكامل

In[4]:=f[x\_]:=Exp[-x^2 Cos[Pi x]^2];

Plot[f[x],{x,-1,1},PlotRange->{0,1}]



In[5]:= NIntegrate[f[x],{x,-1,1}]

لحساب قيمة عددية تقريبية مباشرة للتكامل

Out[5]=1.71167

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2 \cos^2(\pi x)} dx$$

In[6]:=NIntegrate[Exp[-2x],{x,0,Infinity}] لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} dx$$

Out[6]=0.5

In[7]:=NIntegrate[Sqrt[4+x^3],{x,0,3}] لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

$$\int_0^3 \sqrt{4+x^3} dx$$

Out[7]=9.27972

In[8]:=NIntegrate[Sin[x]/(Pi+x),{x,0,Pi}] لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x + \pi} dx$$

Out[8]=0.433785

In[9]:=NIntegrate[Exp[-x^2],{x,0,2}] لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx$$

Out[9]=0.882081

In[10]:=NIntegrate[Cos[x^2],{x,-1,1}] لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

$$\int_{-1}^1 \cos(x^2) dx$$

Out[10]=1.80905

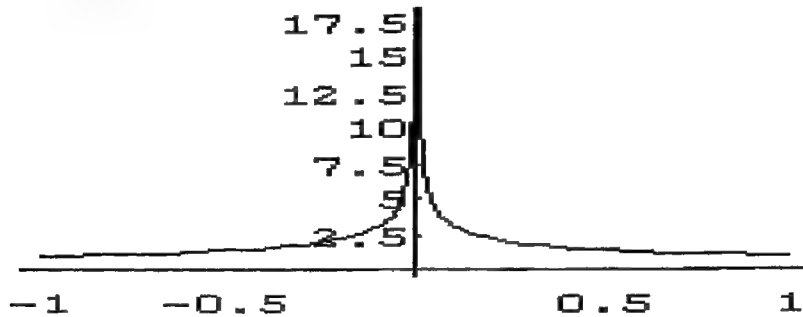
In[11]:=NIntegrate[1/(x-1)^(1/3),{x,-2,1,2}] لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$$

Out[11]=3.06006 - 2.70211 I

مع مراعاة النقطة الشاذة  $x=1$

In[12]:=Plot[1/Sqrt[Abs[x]],{x,-1,1}]

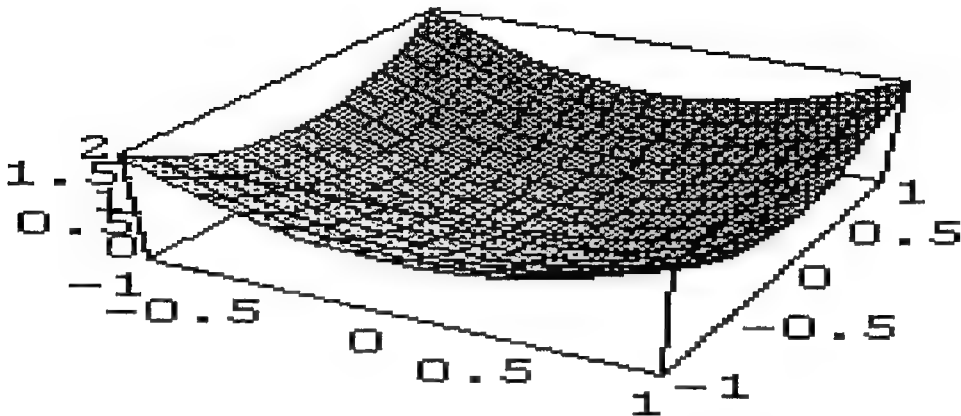


لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل  $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$  مع مراعاة النقطة الشاذة  $x=0$

In[13]:=NIntegrate[1/Sqrt[Abs[x]],{x,-1,0,1}]

Out[13]=4.

In[14]:=Plot3D[x^2+y^2,{x,-1,1},{y,-1,1}]



لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثنائي  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx dy$

In[15]:=NIntegrate[x^2+y^2,{x,-1,1},{y,-1,1}]

Out[15]=2.66667

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثنائي

$$\int_{-5}^5 \int_{-3}^3 e^{\frac{-(x-y)^2}{1+(x+y)^2}} dx dy$$

In[16]:=NIntegrate[Exp[-(x-y)^2]/(1+(x+y)^2),{x,-3,3},{y,-5,5}]

Out[16]=2.48738

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثنائي

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x (2x^2 + y^2) dy dx$$

In[17]:=NIntegrate[2 x^2+y^2,{x,0,1},{y,x^2,x}]

Out[17]=0.135714

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثلاثي

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{y+z} x y z dx dy dz$$

In[18]:= NIntegrate[x y z,{z,0,1},{y,0,z},{x,0,y+z}]

Out[18]=0.118056

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثلاثي

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dx dy$$

In[19]:=NIntegrate[ zSqrt[x^2+y^2+z^2],{y,0,3},{x,0,Sqrt[9-y^2]},  
{z,0,Sqrt[9-x^2-y^2]}]

Out[19]=38.1704

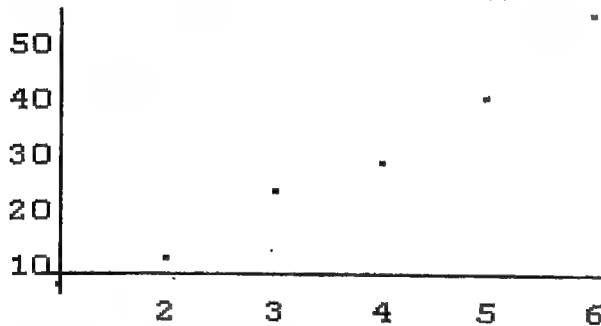
## ٦ . التقريب بالمربعات الصغرى Least - squares

فى داخل بناء ماتيماتكا **built-in** يوجد إمكانيات متعددة للحصول على كثيرة حدود المربعات الصغرى التى تلائم قائمة من البيانات والفكرة الأساسية التى يعتمد عليها ماتيماتكا لملائمة البيانات هو اخذ قائمة من الدوال التى نقوم بتحديددها ثم محاولة إيجاد تركيبة خطية من هذه الدوال معا لتقريب البيانات المعطاة باستخدام قاعدة المربعات الصغرى ويتم ذلك عن طريق جعل المقدار  $\sum_i |y_i - f_i|^2$  اصغر ما يمكن حيث  $y_i$  من البيانات المعطاة ،  $f_i$  هى القيمة من التركيبة الخطية للدوال التى قام المستخدم بتحديددها ويتم ذلك باستخدام الدالة **Fit** والصيغة العامة لها كالاتي :

<b>Fit[data,funcs,vars]</b>	ملائمة البيانات <b>data</b> باستخدام تركيبة خطية من الدوال <b>funcs</b> فى المتغيرات <b>vars</b>
<b>Fit[{y1,y2,...},{f1,f2,...},x]</b>	إيجاد افضل تركيبة خطية من الدوال <b>f1, f2,...</b> تلائم النقط <b>(1,y1),(2,y2),...</b> حيث تم اعتبار قيم <b>x</b> المناظرة لقيم <b>y<sub>i</sub></b> هى <b>x<sub>i</sub> = i</b>
<b>Fit[{x1,y1},{x2,y2},...,{f1,f2,...},x]</b>	إيجاد افضل تركيبة خطية من الدوال <b>f1,f2,...</b> تلائم النقط <b>(x1,y1),(x2,y2),...</b>

<b>Fit[{y1,y2,...},{1,x},x]</b>	إيجاد افضل خط مستقيم <b>linear fit</b> يلائم البيانات <b>(1,y1),(2,y2), ...</b>
<b>Fit[{y1,y2,...},{1,x,x^2},x]</b>	إيجاد افضل كثيرة حدود من الدرجة الثانية <b>Quadratic fit</b> تلائم البيانات <b>(1,y1),(2,y2), ...</b>
<b>Fit[data,Table[x^i,{i,0,n}],x,x]</b>	إيجاد افضل كثيرة حدود من درجة <b>n</b> تلائم البيانات <b>data</b>

In[1]:=data1={6,11,23,28,40,55}; m1=ListPlot[data1]



تعريف قائمة data1 من الأعداد  
ثم تحديد مواضع هذه الأعداد  
في المستوى

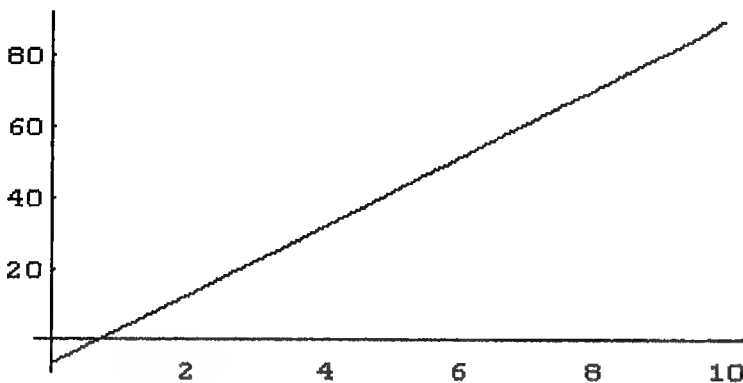
In[2]:= f1=Fit[data1,{1,x},x]

إيجاد معادلة الفضل خط مستقيم

Out[2]=-6.53333 + 9.62857 x

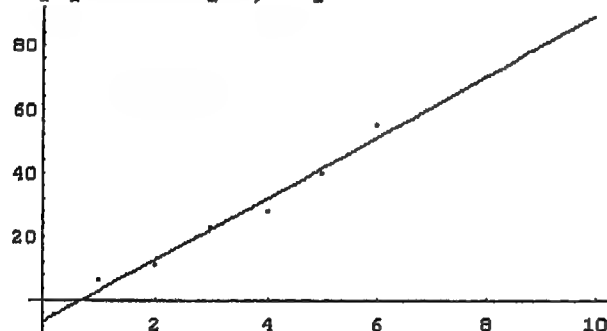
يلائم قائمة البيانات data1

In[3]:=s1=Plot[f1,{x,0,10}]



رسم الخط المستقيم f1  
الناتج من الدالة Fit

In[4]:=Show[s1,m1]



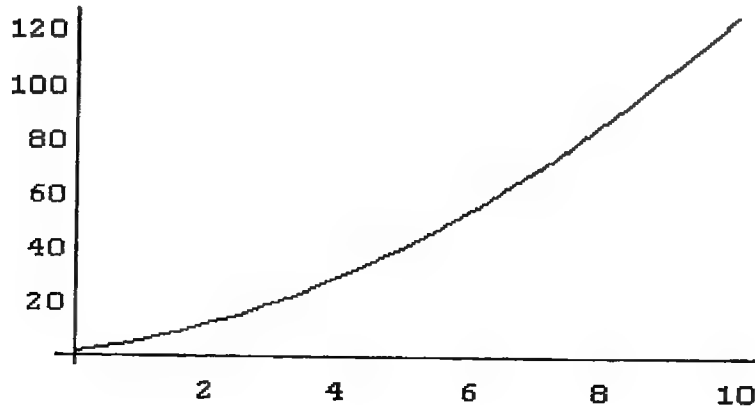
إظهار رسم الخط المستقيم الناتج من  
الدالة Fit مع رسم القائمة data1

In[5]:= f2=Fit[data1,{1,x,x^2},x] إيجاد افضل كثيرة حدود من الدرجة الثانية

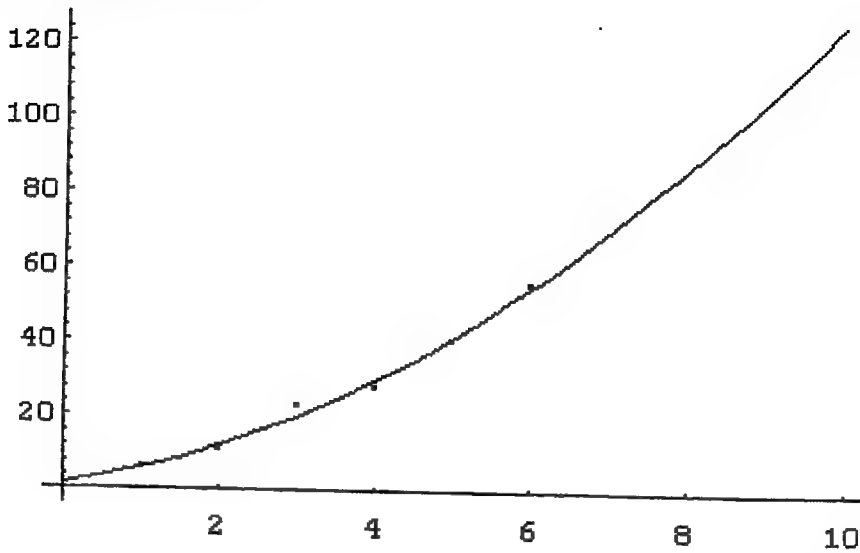
Out[5]=3.37857+1.8x+ 0.892857 x<sup>2</sup> data1 تلائم قائمة البيانات

In[6]:= s2=Plot[f2,{x,0,10}] رسم كثيرة الحدود f2 الناتجة من

الدالة Fit



In[7]:= Show[m1,s2]



إظهار رسم كثيرة الحدود s2 الناتجة من الدالة Fit مع رسم القائمة data1

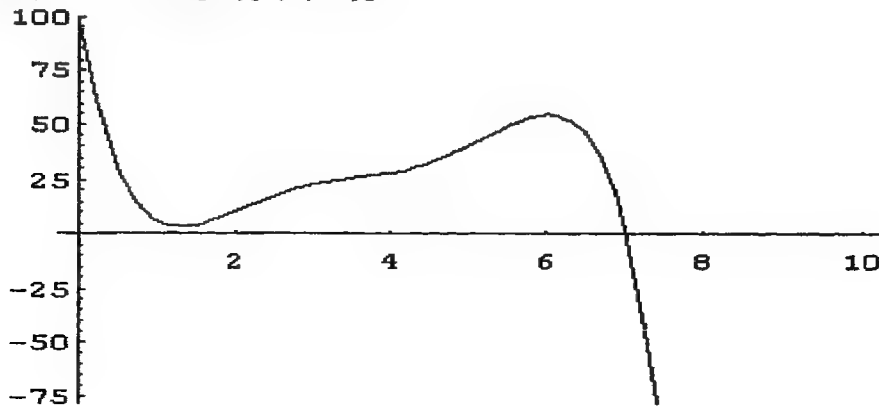
إيجاد الفضل كثيرة حدود من الدرجة الخامسة تلائم قائمة البيانات data1 ثم رسم كثيرة

الحدود f3 الناتجة من الدالة Fit

In[8]:= f3=Fit[data1,Table[x^i,{i,0,5}],x]

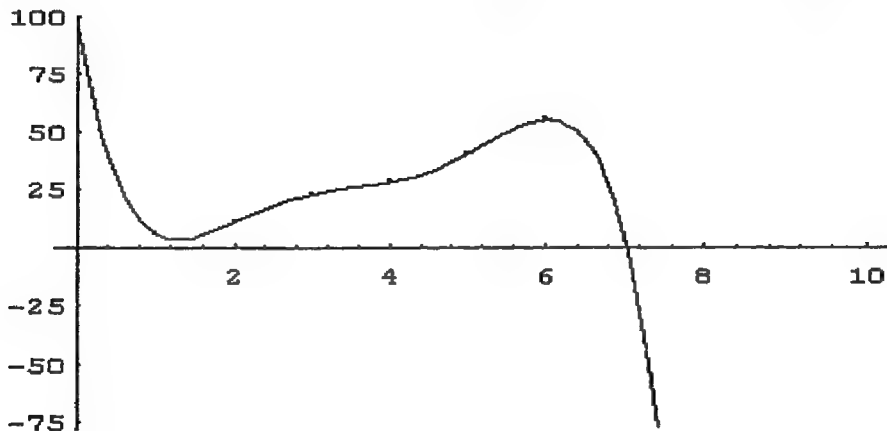
Out[8]=96. - 194.533 x + 144.583 x<sup>2</sup> - 46.5833 x<sup>3</sup> +  
6.91667 x<sup>4</sup> - 0.383333 x<sup>5</sup>

In[9]:=s3=Plot[f3,{x,0,10}]



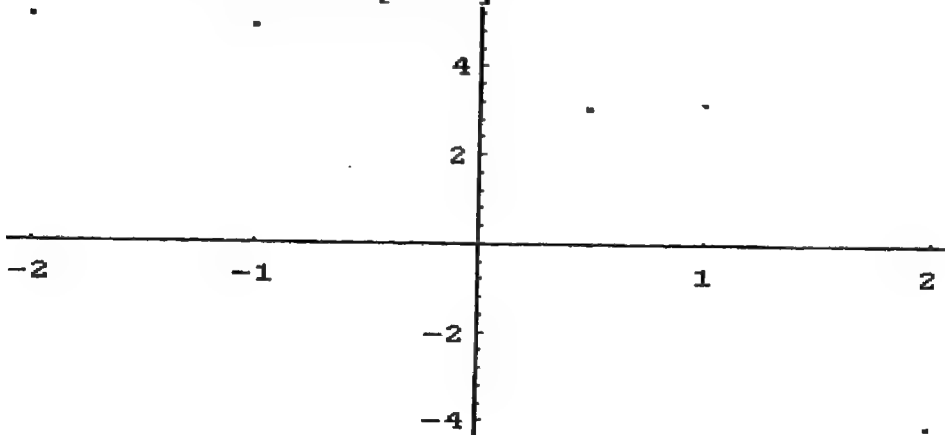
In[10]:= Show[m1,s3]

إظهار رسم كثيرة الحدود s3 الناتجة من  
الدالة Fit مع رسم القائمة data1



تعريف قائمة **data2** من الأعداد ثم تحديد مواضع هذه الأعداد في المستوى

```
In[11]:= data2={{-2,5.1},{-1,4.9},{0.5,3},{1,3.1},{2,-4.1}};
m2=ListPlot[data2]
```

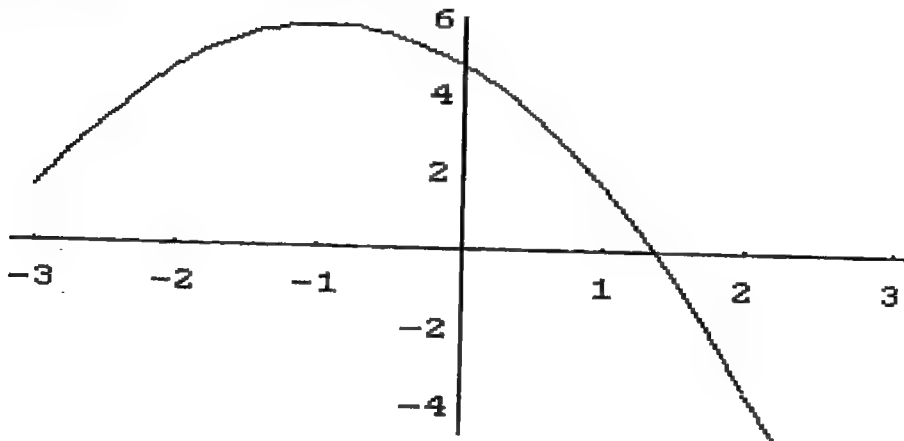


إيجاد الفضل كثيرة حدود من الدرجة الثانية تلائم قائمة البيانات **data2** ثم رسم كثيرة

الحدود **f4** الناتجة من الدالة **Fit**

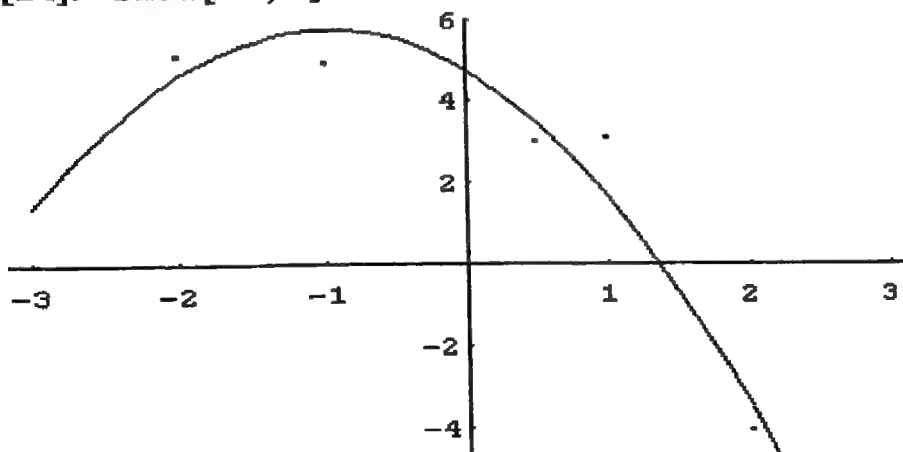
```
In[12]:= f4=Fit[data2,{1,x,x^2},x]
Out[12]=4.75476 - 2.04354 x - 1.04898 x^2
```

```
In[13]:= s4=Plot[f4,{x,-3,3}]
```



إظهار رسم كثيرة الحدود s4 الناتجة من الدالة Fit مع رسم القائمة data2

In[14]:= Show[m2,s4]



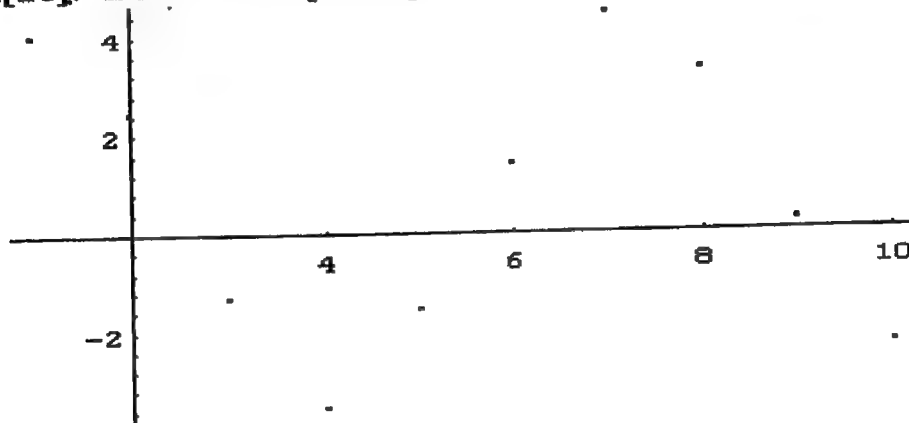
وتعتبر كثيرات الحدود هي الأكثر استخداما مع دالة Fit ولكن يمكن استخدام أي دوال أخرى في قائمة الدوال نرى أنها مناسبة للبيانات مثل الدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية والزائدية ... الخ .

تعريف قائمة data3 من الأعداد ثم تحديد مواضع هذه الأعداد في المستوى

In[15]:=data3=Table[N[Random[]+2Cos[x]+3Sin[x]],{x,1,10}]

Out[15]={4.02232, 2.45486, -1.32769, -3.54897, -1.54028,  
1.4028, 4.47493, 3.28246, 0.177847, -2.3534}

In[16]:=m3=ListPlot[data3]

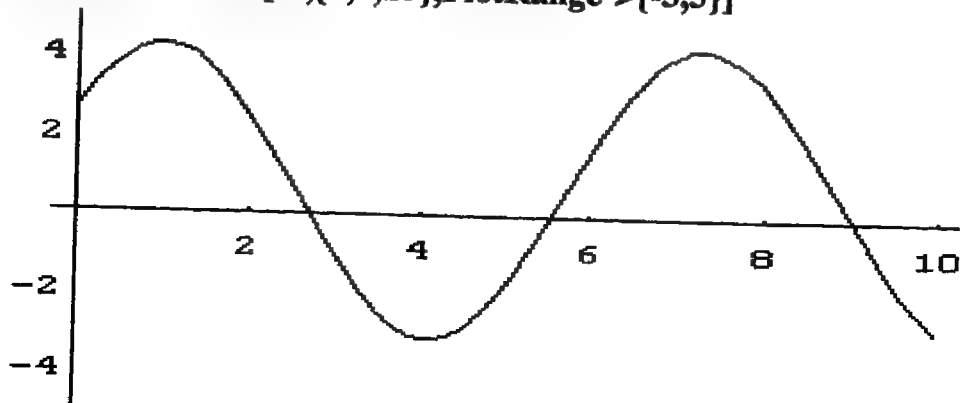


إيجاد الفضل تركيبة خطية من مجموعة الدوال  $\{1, \cos(x), \sin(x)\}$  بحيث تلائم قائمة البيانات **data3** ثم رسم المعادلة **f5** الناتجة من الدالة **Fit**

**In[17]:=f5=Fit[data3,{1,Cos[x],Sin[x]},x]**

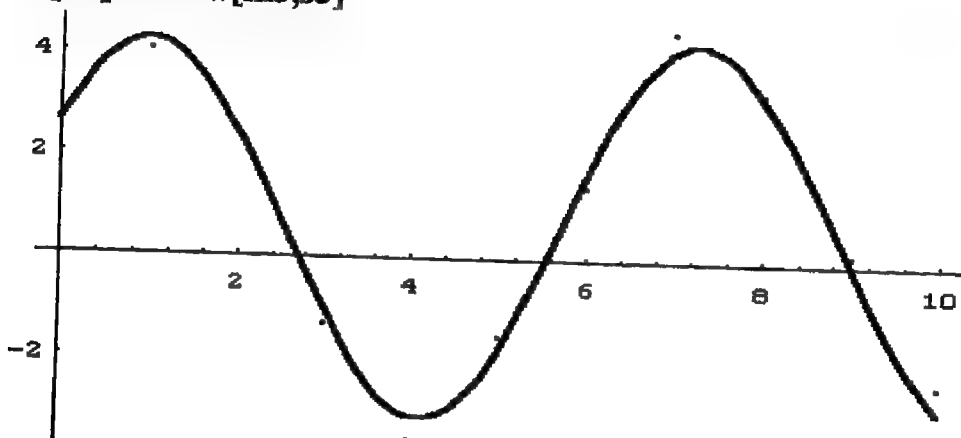
**Out[17]=0.56281 + 2.04344 Cos[x] + 3.05647 Sin[x]**

**In[18]:=s5=Plot[f5,{x,0,10},PlotRange->{-5,5}]**



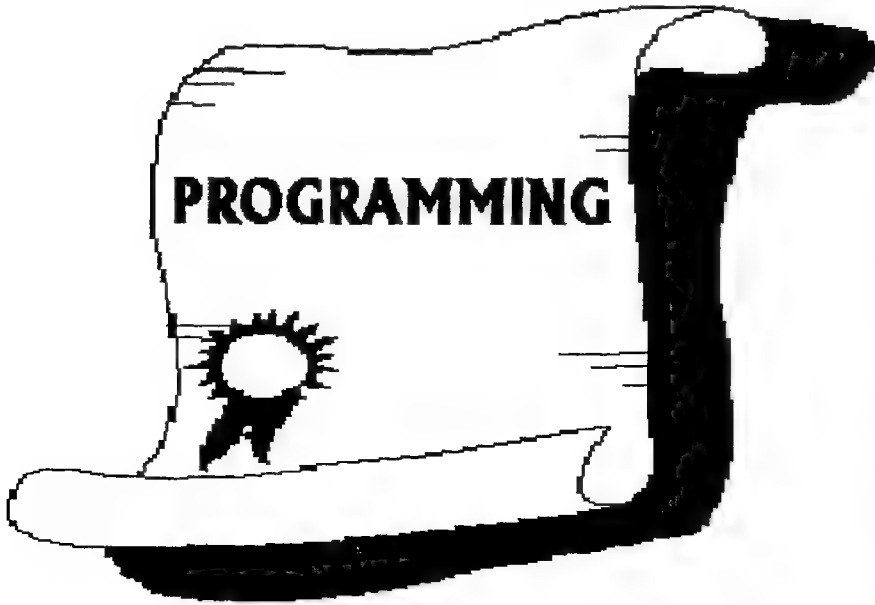
إظهار رسم المعادلة **s5** الناتجة من الدالة **Fit** مع رسم القائمة **data3**

**In[19]:=Show[m3,s5]**





## الباب السابع البرمجة فى ماثيماتيك



فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيك  
والخاصة بالموضوعات الآتية :

**Procedure**

**Loops**

**Conditionals**

١. منظومة الإجراءات

٢. الحلقات التكرارية

٣. أوامر الانتقال المشروط



## الباب السابع

### البرمجة في ماثيماتيكا

عند بناء الحسابات في ماثيماتيكا غالبا ما نحتاج أن نربط مجموعة الأوامر معا ويمكن أن يتم ذلك باستخدام منظومة إجراءات Procedure .

#### ١ . منظومة الإجراءات Procedure

منظومة الإجراءات هي عبارة عن متتابعة من أوامر أو تعبيرات ماثيماتيكا بحيث يفصل بين كلا منها علامة الفصلة المنقوطة ; وقيمة التعبير الأخير في المنظومة يمثل الناتج النهائي .

تعريف منظومة تتكون من مجموعة من الأوامر

Command1;Command2;...

```
In[1]:=r=(1+x)^2;r=Expand[r];r-1
Out[1]= 2 x + x2
```

في هذا المثال نلاحظ أن منظومة الإجراءات عبارة عن ثلاثة تعبيرات حسابية يفصل كل منها عن الآخر بفسلة منقوطة كما نلاحظ أن الناتج النهائي هو قيمة التعبير الأخير ( r - 1 ) في منظومة الإجراءات .

In[2]:= f[x\_]:= (t=(1+x)^2; t=Expand[t])      ويمكن تعريف الدالة كمنظومة إجراءات  
حيث نستخدم الأقواس ( ) لتوضيح  
أن كل الإجراءات معا تمثل الدالة f

In[3]:= f[a]      لحساب قيمة الدالة f عند  $x=a$   
Out[3]= 1+2a+a<sup>2</sup>

In[4]:= t      عند الاستعلام عن قيمة t نجد أن المتغير  
Out[4]= 1 + 2 a + a<sup>2</sup>      t اصبح يمثل القيمة 1+2a+a<sup>2</sup>  
ويحتفظ بها حتى بعد الخروج من المنظومة .

وفي كثير من الأحيان نحتاج الى أن نجعل المتغيرات المستخدمة داخل أى منظومة إجراءات  
كمتغيرات موضعية ( Local ) بمعنى أن هذه المتغيرات تحتفظ بالقيم داخل منظومة الإجراءات  
فقط ولكن تفقد هذه القيم بعد إنهاء الحسابات فى المنظومة والخروج منها ويتم عمل ذلك فى  
ماثماتيكيا باستخدام الأمر Block أو الأمر Module كالتأتى :

<p>للإعلان عن أن المتغيرات x,y,... تمثل متغيرات موضعية داخل منظومة الإجراءات</p> <p style="text-align: right;"><b>procedure</b></p> <p style="text-align: center;">Block[{x, y, ...}, procedure]</p> <p><b>Or</b></p> <p style="text-align: center;">Module[{x, y, ...}, procedure]</p>	<p>تحديد القيم الابتدائية ... y = yo , x = xo للمتغيرات الموضعية داخل منظومة الإجراءات</p> <p style="text-align: right;"><b>procedure</b></p> <p style="text-align: center;">Block[{x=xo, y=yo, ...}, procedure]</p> <p><b>Or</b></p> <p style="text-align: center;">Module[{x = x0, y=yo, ...}, procedure]</p>
---	---

وبذلك فإنه بواسطة الأمر **Block** أو الأمر **Module** يمكن تعريف أى متغيرات داخل منظومة الإجراءات الواحدة دون التأثير على القيم بخارج المنظومة وبالتالي يمكن تعريف نفس المتغير الموضعى داخل أكثر من منظومة إجراءات .

**In[5]:=** عند استخدام الأمر **Block** فى تعريف  
**g[x\_]:=Block[{u},u=(1+x)^2;u=Expand[u]]** الدالة **g** فإن **u** يعامل كمتغير موضعى

**In[6]:= g[a]** لحساب قيمة الدالة **g** عند **x = a**  
**Out[6]= 1 + 2a + a<sup>2</sup>**

**In[7]:=u** عند الاستعلام عن قيمة **u** نلاحظ عدم  
**Out[7]=u** وجود قيمة لأن **u** متغير موضعى

**In[8]:=x=5;** تعريف **x=5** خارج المنظومة ثم استخدام  
**Module[{x},x=Random[];Print[x];]** الأمر **Module** واعتبار أن **x** متغير موضعى  
**Out[8]=0.863718** وطباعة قيمة عشوائية للمتغير **x**

**In[9]:=?x** عند الاستعلام عن قيمة **x** نلاحظ أن  
**Out[9]=Global`x** **x = 5** وهى القيمة الموجودة خارج  
**x = 5** الأمر **Module**

## ٢ . الحلقات التكرارية Loops

منظومة الإجراءات تسمح بتنفيذ مجموعة من تعبيرات ماثيماتكا وفقا لرتيب هذه التعبيرات داخل منظومة الإجراءات وفي كثير من الأحيان نحتاج الى تنفيذ بعض العمليات بصورة متكررة ويتم ذلك داخل ماثيماتكا باستخدام أوامر خاصة بالحلقات التكررة Loops حيث تعمل الحلقات التكررة على تكرار مجموعة متتالية من الأوامر بصورة متكررة لعدد محدود من المرات مع إمكانية التغيير الأوتوماتيكي لقيم المتغيرات داخل الحلقات التكرارية ، ومن أوامر ماثيماتكا الخاصة بالحلقات التكرارية هو الأمر Do والذي يستخدم بصورة مشابهة كما فى لغات البرمجة مثل فورتران FORTRAN والأمر Do له استخدامات متعددة وصيغته العامة موضحة بالجدول الآتى :

الصيغة العامة للأمر	الوظيفة التي يقوم بها الأمر
Do[expr,{n}]	حساب قيمة expr عدد n من المرات
Do[expr,{i,imax}]	حساب قيمة expr بصورة متكررة وفقا للعداد i من i=1 الى i=imax بخطوة تساوى 1
Do[expr,{i,imin,imax}]	حساب قيمة expr بصورة متكررة وفقا للعداد i من i=imin الى i=imax بخطوة تساوى 1
Do[expr,{i,imin,imax,istep}]	حساب قيمة expr بصورة متكررة وفقا للعداد i من i=imin الى i=imax بخطوة تساوى istep
Do[expr,{i,imin,imax}, {j,jmin,jmax}]	حساب قيمة expr لقيم i, j المعطاة

In[1]:=t=x;Do[t=2(1+t),{3}];t  
Out[1]=2 (1 + 2 (1 + 2 (1 + x)))

في هذه الحلقة يتم حساب التعبير  
 $t=2(1+t)$  ثلاث مرات حيث  $t=x$

In[2]:=Do[Print[m^2],{m,3}]  
Out[2]= 1  
4  
9

في هذه الحلقة يتم طباعة  $m^2$  لقيم  
 $m$  من 1 الى 3

In[3]:=Do[a=i^2+3j;Print[a],{i,2},{j,i}]  
Out[3]= 4  
7  
10

في هذه الحلقة يتم حساب التعبير  
 $a = i^2 + 3j$  ثم طباعته لقيم  
 $i, j$  المعطاة

وفي برنامج ماثميكا يمكن تكرار تطبيق نفس الدالة عدد محدود من المرات على تعبير معين  
باستخدام الأمر Nest كالآتي :

**Nest[f,expr,n]**

تطبيق الدالة  $f$  على التعبير  $expr$   
لعدد  $n$  من المرات

In[4]:=Nest[f,x,3]  
Out[4]= f[f[f[x]]]

لحساب  $f(f(f(x)))$

In[5]:=f[x\_]=(x+1)^2;Nest[f,x,2]  
Out[5]=(1 + (1 + x)^2)^2

تعريف الدالة  $f(x) = (x+1)^2$   
ثم حساب  $f(f(x))$

In[6]:= Nest[f,1,2]  
Out[6]= 25

لحساب  $f(f(1))$

وفي برنامج ماتيماتكا يمكن بناء الحلقات بحيث يتم إيقاف تنفيذ التكرار إذا لم يتحقق شرط معين وذلك باستخدام الأوامر **For , While** كالآتي :

الوظيفة التي يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر
حساب قيمة <b>start</b> والتحقق من الشرط <b>test</b> لتنفيذ <b>body</b> مع تكرار إضافة <b>step</b>	<b>For[start,test,step,body]</b>
يتم تكرار تنفيذ <b>body</b> إذا كان الشرط <b>test</b> متحقق	<b>While[test,body]</b>

**In[7]:=For[i=0,i<3,i=i+1,Print[i]]**

**Out[7]=**

0  
1  
2

حلقة باستخدام **For** حيث يتم البدء

بقائمة **i=0** والتحقق من الشرط **i<3**

لتنفيذ طباعة **i** مع إضافة 1 الى **i**

**In[8]:=i=0;While[i<3,Print[i];i=i+1]**

**Out[8]=**

0  
1  
2

تنفيذ الحلقة السابقة باستخدام **While**

وعند استخدام أوامر الحلقات في ماتيماتكا خاصة مع الأوامر For , While غالباً ما نحتاج الى تكرار تعديل قيم في بعض المتغيرات المستخدمة داخل الحلقة ، وتوجد بعض الطرق المختصرة لأجراء مثل هذه التعديلات في قيم المتغيرات والجدول الآتى يوضح ذلك .

العملية المختصرة	معنى العملية المختصرة
$i++$	زيادة قيمة $i$ بمقدار 1 فيما يستجد مع الاحتفاظ بقيمة $i$ السابقة داخل $i++$
$i--$	نقصان قيمة $i$ بمقدار 1 فيما يستجد مع الاحتفاظ بقيمة $i$ السابقة داخل $i--$
$++i$	زيادة قيمة $i$ بمقدار 1 وجعل $i$ هى القيمة الجديدة أى أن $++i$ تمثل $i+1$
$--i$	نقصان قيمة $i$ بمقدار 1 وجعل $i$ هى القيمة الجديدة أى أن $--i$ تمثل $i-1$
$i+=d$	زيادة قيمة $i$ بمقدار $d$ أى أن $i=i+d$
$i-=d$	نقصان قيمة $i$ بمقدار $d$ أى أن $i=i-d$
$x*=c$	ضرب $x$ فى العدد $c$ أى أن $x=x*c$
$x/=c$	قسمة $x$ على العدد $c$ أى أن $x=x/c$
$\{x,y\}=\{y,x\}$	استبدال قيم $x, y$ أى تغيير قيمة $x$ لتصبح $y$ وتغيير قيمة $y$ لتصبح $x$

In[9]:=i=5;Print[i++];Print[i]

Out[9]=

5  
6

في هذا المثال يتم طباعة قيمة  $i++$  وقيمة  $i$   
ونلاحظ أن قيمة  $i++$  هي قيمة  $i$  قبل الزيادة

In[10]:=i=5;Print[++i];Print[i]

Out[10]=

6  
6

في هذا المثال يتم طباعة قيمة  $++i$  وقيمة  $i$   
ونلاحظ أن قيمة  $++i$  هي قيمة  $i$  بعد الزيادة

In[11]:=r=x;r+=3y;r

Out[11]=x + 3 y

في هذه المنظومة تم وضع  $r=x$  ثم زيادة قيمة  $r$   
بمقدار  $3y$  فتصبح قيمة  $r$  الجديدة  $x+3y$

In[12]:=a=3;b=7;Print[{a,b}];

{a,b}={b,a};Print[{a,b}]

Out[12]=

{3, 7}  
{7, 3}

استبدال قيم  $a, b$

In[13]:=x=1;y=2;z=3;Print[{x,y,z}];

{x,y,z}={z,x,y};Print[{x,y,z}]

Out[13]=

{1, 2, 3}  
{3, 1, 2}

استبدال قيم  $x, y, z$

**In[14]:=For[i=1;t=x,i^2<10,i++,t=t^2+i;Print[t]]**

**Out[14]=**

$$1+x^2$$

$$2+(1+x^2)^2$$

$$3+(2+(1+x^2)^2)^2$$

هذه الحلقة على الصورة **For[start,test,step,body]** حيث

<b>start</b>	<b>i=1 ; t=x</b>
<b>test</b>	<b>i^2&lt;10</b>
<b>step</b>	<b>i++</b>
<b>body</b>	<b>t=t^2+i ; Print[t]</b>

### ٣ . أوامر الانتقال المشروط Conditionals

عند بناء منظومة الإجراءات Procedure في ماتيماتكا غالبا ما نحتاج الى تنفيذ بعض العمليات إذا تحقق شروط معينة ويتم ذلك في ماتيماتكا باستخدام أوامر الانتقال المشروط الآتية :

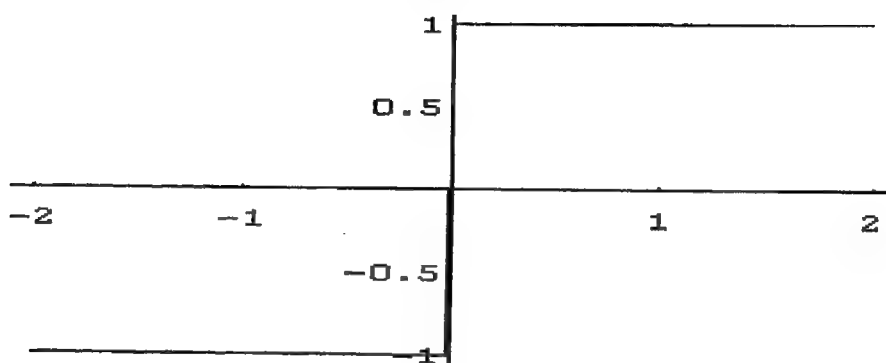
الصيغة العامة للأمر	الوظيفة التي يقوم بها الأمر
If[test,then,else]	يتم تنفيذ then إذا كان test تحقق وخلاف ذلك يتم تنفيذ else
If[test,then,else,unknown]	إذا كان test تحقق يتم تنفيذ then وإذا كان test غير متحقق يتم تنفيذ else وخلاف ذلك يتم تنفيذ unknown
1,value1,test2,value 2, ... ]	يتم تنفيذ value المناظرة الى أول اختبار testi يتحقق

```
In[1]:= x=3;y=5;
      If[ x > y , Print[x] , Print[y] ]
Out[1]=
      5
```

إدخال قيم  $x, y$  ثم طباعة العدد الأكبر وقد تم استخدام أمر الانتقال المشروط **If** على الصورة **If[test,then,else]** حيث

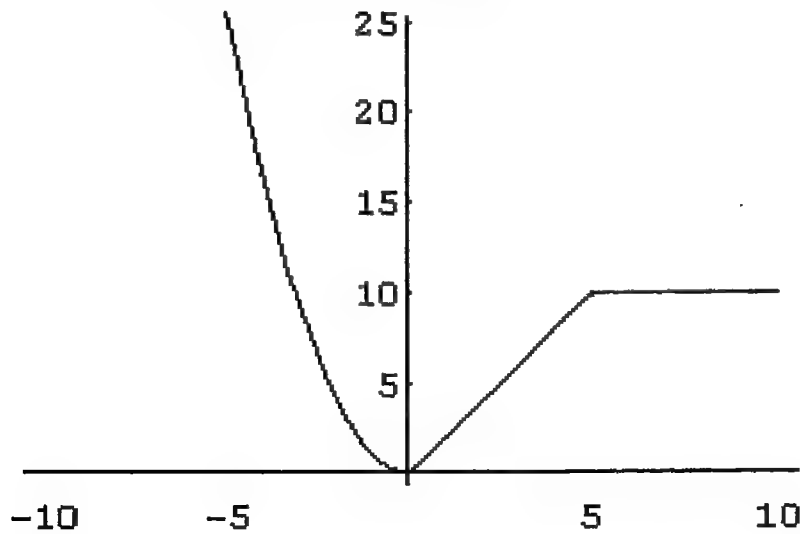
test	$x > y$
then	Print[x]
else	Print[y]

```
In[2]:=f[x_]:=If[x>0,1,-1];
      Plot[f[x],{x,-2,2}]
```



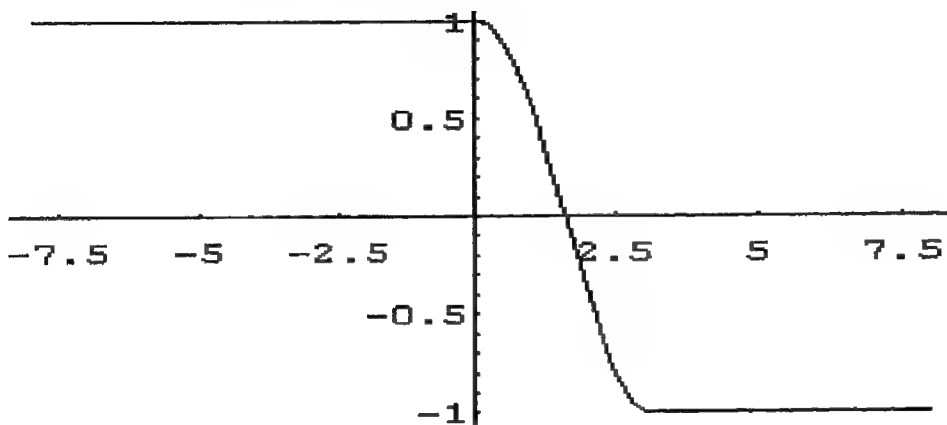
استخدام الأمر **If** في تعريف الدالة  $f[x]$  ثم رسم الدالة

```
In[3]:=r1[x_]:=Which[x<0,x^2,x>0 && x<5,2x,True,10];
Plot[r1[x],{x,-10,10}]
```



استخدام الأمر Which في تعريف الدالة r1[x] ثم رسم الدالة

```
In[4]:=r2[x_]:=Which[x<0,1,x<N[Pi],Cos[x],True,-1];
Plot[r2[x],{x,-8,8}]
```



استخدام الأمر Which في تعريف الدالة r2[x] ثم رسم الدالة

منظومة تم فيها تعريف قائمة a من الأعداد الحقيقية ثم حساب وطباعة العدد الأصغر من القائمة

```
In[5]:=a={5,2,7,55,-4,9,3,10,-24,44,65,-21};mi=a[[1]];
Do[If[mi>a[[i]],mi=a[[i]],++i},{i,1,Length[a]-1}];
Print["Minimum of the list a = ",mi]
```

Out[5]= Minimum of the list a = -24

منظومة تم فيها حساب وطباعة العدد الأكبر من القائمة a

```
In[6]:=ma=a[[1]];
Do[If[ma<a[[i]],ma=a[[i]],++i},{i,1,Length[a]-1}];
Print["Maximum of the list a = ",ma]
```

Out[6]= Maximum of the list a = 65

منظومة تم فيها حساب وطباعة العدد الأصغر والعدد الأكبر من القائمة a

```
In[7]:=mi=a[[1]];ma=a[[1]];
Do[Which[mi>a[[i]],mi=a[[i]],ma<a[[i]],ma=a[[i]]];++i,
{i,2,Length[a]-1}];
Print["Minimum of the list a = ",mi];
Print["Maximum of the list a = ",ma]
```

Out[7]= Minimum of the list a = -24

Maximum of the list a = 65

وباستخدام الدوال الموجودة داخل بناء ماتيماتكا يمكن حساب

Min العدد الأصغر من القائمة مباشرة باستخدام الدالة

Max والعدد الأكبر من القائمة مباشرة باستخدام الدالة

```
In[8]:=Min[a]
```

Out[8]=-24

```
In[9]:=Max[a]
```

Out[9]=65



## المراجع

- [ 1 ] - Wolfram , Stephen  
Mathematica : A System for Doing Mathematics  
by Computer ,  
Second Edition , Addison Wesley , 1991 .
- [ 2 ] - Wolfram , Stephen  
Mathematica : The Student Book ,  
Addison Wesley , 1994 .
- [ 3 ] - Abell , Martha L . and Braselton, Tames P . ,  
The Mathematica Handbook  
Academic Press , 1992 .
- [ 4 ] - Maeder , Roman ,  
Programming in Mathematica ,  
Addison Wesley , 1992 .

رقم الإيداع : ٥٦١٦ / ٢٠٠٠







## هذا الكتاب

برنامج ماثيماتيكما هو أحد برامج الكمبيوتر الهامة التى ظهرت حديثاً ، ويحتوى على العديد من الأوامر والدوال التى تغطى معظم الفروع الدقيقة فى الرياضيات .

ويقدم هذا الكتاب شرح تفصيلى لبرنامج ماثيماتيكما وكيفية التعامل مع الأوامر والدوال الخاصة به على الكمبيوتر والاستفادة المثلى منه فى حل المشاكل الرياضية المختلفة .

ويقدم الكتاب فى أسلوب مبسط بعيداً عن التعقيد كما يتضمن الجزء العملى الخاص بالتعرف على أوامر برامج ماثيماتيكما وتنفيذها على الكمبيوتر ، حيث يعرض العديد من الأمثلة التى تم تنفيذها على الكمبيوتر والتى تخدم مشاكل متعددة فى فروع الرياضيات المختلفة مثل التفاضل والتكامل ، والجبر ، والمعادلات التفاضلية والتحليل العددى ، كما يتضمن الكتاب العديد من التطبيقات للأوامر الخاصة برسم المنحنيات سواء فى المستوى أو الفراغ بالصورة الكرتيزية أو البرمترية ، كذلك حل أنظمة من المعادلات .

وهذا الكتاب موجه لدراسى الرياضيات والمهتمين بالكمبيوتر وتطبيقه فى مجال الرياضيات ، حيث يخدم الدارسين سواء فى المرحلة الثانوية أو الجامعية لطلاب قسم الرياضيات بكلية التربية أو العلوم أو كلية الهندسة .

والله ولى التوفيق ...

الناشر

ISBN : 977-281-137-5

ACADEMIC BOOKSHOP

